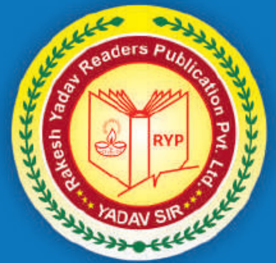
SSC | BANK | RAILWAY | DEFENCE | CSAT



THE FORMULA BOOK

BILINGUAL

MATHEMATICS

All Formulas & Theorems | Smart Concept | Short Tricks

Arithmetic and Advance Maths

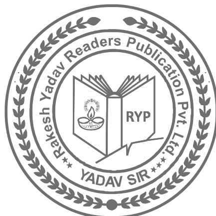
USEFUL FOR

SSC CGL, CHSL, CPO, CET, MTS, Delhi Police, Head Constable, IBPS PO, Clerk, SBI, RRB, CDS, AFCAT, CSAT, ICAR, CAPF, Assistant exams, Other State & One-day Competitive Exams.



RAKESH YADAV
Selected Excise Inspector

Rakesh Yadav Readers Publication Pvt. Ltd



Rakesh Yadav Readers Publication Pvt. Ltd.

A-16, CAREERWILL TOWER AZADPUR, DELHI-110033
Contact No. : 92-686-686-86, 93-105-900-20

THE FORMULA BOOK MATHEMATICS

First Edition : 2023–24

Editor-in-chief : Jagram Yadav

Editorial Team : Gaurav Azad, Ayush Yadav, Naman Bansal, Dinesh Kain, Akash Kumar, Sushil Pandey, Saurav Kumar, Ankush Gurjar & Jeetu Singh

Cover Designing, Page Layouting & Typesetter:

Pawan Kr. Sharma, Sandeep Kr. Sharma & Amita Rai

Typist : Dinesh Sharma, Santosh Kumar, Rajan Jha, Ramchandra & Chandani Gupta

PREFACE

Nothing thrills a writer more than the success of his book. With this book, I hope to reach a much wider section of the student community and others, who relentlessly compete for various Government jobs.

I am thankful to Almighty and my family (My parents, brother, wife, daughters and son), who extended their help in various invisible ways. I also express my thanks to the Mathematics Expert Team. I sincerely hope, the book **"The Formula Book Mathematics " (Bilingual)** will meet a good response. I would humbly appreciate suggestions, doubts etc. concerned with this book at the following.

Rakesh Yadav
Whatsapp @+91-966-766-777-2
E-mail:- rakesh.yadav0011@ gmail.com

Content/विषय-सूची

[Arithmetic]

[Advance]

PERCENTAGE
प्रतिशतता

CHAPTER
01

Percentage: Percentage refers to “Per hundred” i.e, 15% means 15 out of hundred or $\frac{15}{100}$. Percentage is denoted by ‘%’.

प्रतिशत:- प्रतिशत का शाब्दिक अर्थ 'प्रति सैकड़ा' या 'शतांश' अर्थात प्रत्येक 100 पर इसे % चिह्न द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

जैसे- 15 प्रतिशत का अर्थ होता है 100 भाग में से 15 भाग

अर्थात, 15 प्रतिशत = 15% = $\frac{15}{100}$

In other words, it can be said that 'percentage is that fraction whose every 100 and fraction is any fixed amount, this fixed amount is called per hundred.

दूसरे शब्दों में, कह सकते है कि ‘प्रतिशत वह भिन्न है जिसका हर 100 और अंश कोई भी निर्धारित राशि होती है, इसी निर्धारित राशि को प्रति सौ कहते है।

जैसे a% = $\frac{a}{100}$ तथा 18% = $\frac{18}{100}$

Important Formulae/महत्त्वपूर्ण सूत्र

1. If you have to find the y% of a number X then, Y% of x/यदि आपको किसी संख्या x का y% ज्ञात करना हो, तब x का y% = $\frac{x \times y}{100}$

   जैसे- 500 का 20% = $\frac{500 \times 20}{100}$ = 100
2. If x is to be expressed as a percentage of y then required percentage/यदि किसी एक राशि x को राशि y के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना है, तब अभीष्ट प्रतिशत = $\frac{x}{y} \times 100\%$

   जैसे- 150 किग्रा में 30 किग्रा का प्रतिशत = $\frac{30}{150} \times 100$ = 20%
3. If a fraction is to be converted into a percentage, multiply the fraction by 100 and put a '%' sign. यदि किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलना हो तो भिन्न को 100 से गुणा करके % का चिन्ह लगा देते है,

   जैसे- $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$
4. To convert a percentage to a fraction or decimal fraction: Remove the % sign and divide by 100. किसी प्रतिशत को भिन्न या दशमलव भिन्न में परिवर्तित करने के लिए % का चिन्ह हटाकर 100 से भाग कर देते हैं।

   जैसे- 8% = $\frac{8}{100}$ = 0.08

FRACTION TO PERCENTAGE

Fraction	Percentage (In decimal)	Percentage (In mixed decimal)
1	100%	100%
$\frac{1}{2}$	50%	50%
$\frac{1}{3}$	33.33%	$33\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{4}$	25%	25%
$\frac{1}{5}$	20%	20%
$\frac{1}{6}$	16.66%	$16\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{7}$	14.28%	$14\frac{2}{7}\%$
$\frac{1}{8}$	12.5%	$12\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{9}$	11.11%	$11\frac{1}{9}\%$
$\frac{1}{10}$	10%	10%
$\frac{1}{11}$	9.09%	$9\frac{1}{11}\%$
$\frac{1}{12}$	8.33%	$8\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{13}$	7.69%	$7\frac{9}{13}\%$
$\frac{1}{14}$	7.14%	$7\frac{1}{7}\%$
$\frac{1}{15}$	6.66%	$6\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{16}$	6.25%	$6\frac{1}{4}\%$
$\frac{1}{17}$	5.88%	$5\frac{15}{17}\%$
$\frac{1}{18}$	5.55%	$5\frac{5}{9}\%$
$\frac{1}{19}$	5.26%	$5\frac{5}{19}\%$
$\frac{1}{20}$	5%	5%
$\frac{1}{21}$	4.76%	$4\frac{16}{21}\%$

Fraction	Percentage	Percentage
$\frac{1}{22}$	4.54%	$4\frac{6}{11}\%$
$\frac{1}{23}$	4.34%	$4\frac{8}{23}\%$
$\frac{1}{24}$	4.16%	$4\frac{1}{6}\%$
$\frac{1}{25}$	4%	4%
$\frac{1}{40}$	2.5%	$2\frac{1}{2}\%$
$\frac{3}{8}$	37.5%	$37\frac{1}{2}\%$
$\frac{5}{8}$	62.5	$62\frac{1}{2}\%$
$\frac{4}{7}$	57.14%	$57\frac{1}{7}\%$
$\frac{2}{3}$	66.66%	$66\frac{2}{3}\%$
$\frac{4}{5}$	80%	80%
$\frac{3}{4}$	75%	75%
$\frac{5}{11}$	45.45%	$45\frac{5}{11}\%$
$\frac{7}{11}$	63.66%	$63\frac{7}{11}\%$
$\frac{10}{11}$	90.90%	$90\frac{10}{11}\%$
$\frac{4}{9}$	44.44%	$44\frac{4}{9}\%$
$\frac{7}{9}$	77.77%	$77\frac{7}{9}\%$

Derived fraction from base fractions

(आधार भिन्न से व्युत्पन्न भिन्न)

- $\frac{1}{4} = 25\%$ $\quad \frac{3}{4} = 75\%$
- $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$ $\quad \frac{4}{7} = 57\frac{1}{7}\%$

  $\frac{5}{7} = 71\frac{3}{7}\%$
- $\frac{1}{5} = 20\%$ $\quad \frac{3}{5} = 3 \times 20\% = 60\%$
- $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$

  $\frac{5}{6} = 16\frac{2}{3}\% \times 5 = 80 + \frac{10}{3} = \boxed{83\frac{1}{3}\%}$
- $\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$ $\quad \frac{11}{15} = 11 \times 6\frac{2}{3}\% = 73\frac{1}{3}\%$
- $\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}\%$
- $\frac{1}{24} = 4\frac{1}{6}\%$
- $\frac{1}{48} = 2\frac{1}{12}\%$
- $\frac{17}{48} = 17 \times 2\frac{1}{12}\% = 35\frac{5}{12}\%$
- $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$

  $\frac{13}{16} = 13 \times 6\frac{1}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

  or $\frac{13}{16} = 1 - \frac{3}{16} = 100\% - 18\frac{3}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$
- $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$

  $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7} = 100 - 14\frac{2}{7}\% = 85\frac{5}{7}\%$
- $\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}\%$

  $\frac{11}{12} = 1 - \frac{1}{12} \rightarrow 100\% - 8\frac{1}{3}\% \rightarrow 91\frac{2}{3}\%$
- $\frac{19}{24} = 1 - \frac{5}{24} \Rightarrow 100\% - 5\left(4\frac{1}{6}\%\right)$

  $\Rightarrow 100\% - 20\frac{5}{6}\% \Rightarrow 79\frac{1}{6}\%$
- $\frac{40}{9} = 4 + \frac{4}{9} \rightarrow 400\% + 44.44\% \rightarrow 444.44\%$
- $\frac{43}{6} = 7 + \frac{1}{6} \rightarrow 700\% + 16.66\% \rightarrow 716.66\%$
- $\frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7} \rightarrow 100\% + 85\frac{5}{7}\% \rightarrow 185\frac{5}{7}\%$
- $\frac{35}{6} = 5 + \frac{5}{6} \rightarrow 500\% + 83\frac{1}{3}\% \rightarrow 583\frac{1}{3}\%$
- $\frac{29}{3} = 9 + \frac{2}{3} \rightarrow 900\% + 66\frac{2}{3}\% \rightarrow 966\frac{2}{3}\%$
- $\frac{71}{12} = 5 + \frac{11}{12} \rightarrow 500\% + 11\left(8\frac{1}{3}\%\right) \rightarrow 500\% + 91\frac{2}{3}\% \rightarrow 591\frac{2}{3}\%$

  $\frac{37}{15} = 2 + \frac{7}{15} \rightarrow 200\% + 46\frac{2}{3}\% \rightarrow 246\frac{2}{3}\%$

Percentage to fraction conversion
प्रतिशत का भिन्न रूपांतरण

- $17.5\% \rightarrow 17.5\times\frac{1}{100} \rightarrow \frac{7}{40}$ or

$\left(2.5\% = \frac{1}{40}\right)\times 7 \rightarrow 17.5\% = \frac{7}{40}$

- $164\% \rightarrow \frac{164}{100}\% \rightarrow \frac{41}{25}$
- $15\frac{5}{8}\% \rightarrow \frac{125}{8}\% \rightarrow \frac{125}{800} \rightarrow \frac{5}{32}$
- $29\frac{1}{6}\% \rightarrow 25\% + 4\frac{1}{6}\% \rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$
- $23.33\% \rightarrow 20\% + 3.33\% \rightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$
- $78\frac{1}{3}\% \rightarrow 75\%+3\frac{1}{3}\% \rightarrow \frac{3}{4}+\frac{1}{30} \rightarrow \frac{47}{60}$
- $46.66\% \rightarrow 40\%+6.66\% \rightarrow \frac{2}{5}+\frac{1}{15} \rightarrow \frac{7}{15}$
- $82.5\% \rightarrow 80\%+2.5\% \rightarrow \frac{4}{5}+\frac{1}{40} \rightarrow \frac{33}{40}$
- $237.5\% \rightarrow 200\% + 37.5\% \rightarrow 2+\frac{3}{8} \rightarrow \frac{19}{8}$
- $342.84\% \rightarrow 300\% + 42.84\% \rightarrow 3+\frac{3}{7} \rightarrow \frac{24}{7}$
- $756.33\% \rightarrow 7+\frac{9}{16} \rightarrow \frac{121}{16}$
- $538.33\% \rightarrow 500\% + 30\% + 8.33\% \rightarrow 5 + \frac{3}{10} + \frac{1}{12} \rightarrow \frac{323}{60}$
- $528.56\% \rightarrow 5 + \frac{2}{7} \rightarrow \frac{37}{7}$

Some percentage formulae/कुछ प्रतिशत नियम

- a% of b = b% of a $\Leftrightarrow \frac{a\times b}{100} = \frac{b\times a}{100}$
- 2a% of $\frac{b}{2} = \frac{a}{2}$% of 2b $\Leftrightarrow \frac{a\times b}{100} = \frac{b\times a}{100}$
- 3a% of $\frac{b}{3} = \frac{a}{3}$% of 3b $\Leftrightarrow \frac{a\times b}{100} = \frac{b\times a}{100}$
- 4a% of $\frac{b}{4} = \frac{a}{4}$% of 4b $\Leftrightarrow \frac{a\times b}{100} = \frac{b\times a}{100}$
- a% of b = 2a% of $\frac{b}{2}$
- (a+b)% of x = a% of x + b% of x
- (a+b)% of $(x+y)$ = a% of $(x+y)$ + b% of $(x+y)$

Percentage Tricks

- ab.abab....% = $\frac{ab}{99}$
- abc.abcabc.....% = $\frac{abc}{999}$

  For eg. 11.1111....% = $\frac{11}{99}$

  34.3434....% = $\frac{34}{99}$
- ab.2ab% = $\frac{ab}{98}$
- ab.3ab% = $\frac{ab}{97}$
- ab.5ab% = $\frac{ab}{95}$

Rule 1: If x is reduced to X_0, then,

$$\text{Reduce \%} = \frac{x - x_0}{x}\times 100$$

यदि x को x_0 तक कम किया जाए, तो कम% % = $\frac{x - x_0}{x}$

Rule 2 : If x is increased to x_1, then, Increment%/यदि x को x_1 तक बढ़ाया जाए तो वृद्धि % = $\frac{x_1 - x}{x}\times 100$

Rule 3: If an amount is increased by a% and then it is reduced by a% again, then percentage change will be a decrease of $\frac{a^2}{100}$% ./यदि एक राशि a% बढ़ाई जाती है और फिर a% घटायी जाती है, तो प्रतिशत में बदलाव (कमी) होगी $\frac{a^2}{100}$%

Rule 4: If the cost of an article is increased by A%, then how much to decrease the consumption of article, so that expenditure remains same is given by

or

If the income of a man is A% more than another man, then income of another man is less in comparison to the 1st man by

किसी वस्तु की कीमत A% बढ़ती है, तो वस्तु की खपत में कितने प्रतिशत की कमी करनी चाहिए कि खर्च में कोई बदलाव न हो? या, यदि किसी व्यक्ति A की आय किसी अन्य व्यक्ति B की आय से A% अधिक है, तो दूसरे की आय, पहले व्यक्ति की आय से कितना प्रतिशत कम है?

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $\left(\frac{A}{(100+A)}\times 100\right)\%$

***Rule 5*:** If the cost of an article is decreased by A%, then the increase in consumption of article to maintain the expenditure will be?

OR

If 'x' is A% less than 'y', then y is more than 'x' by

Required% = $\left(\frac{A}{(100-A)}\times 100\right)$% (Increase)

यदि किसी वस्तु की कीमत A% घटती है, तो वस्तु की खपत में कितने प्रतिशत की वृद्धि करें खर्चा वही रहे?

या

यदि x, y से A% कम है, तो y, x से कितना प्रतिशत अधिक है?

$\therefore$ वृद्धि/कमी% = $\left(\frac{A}{(100-A)}\times 100\right)$% वृद्धि

Rule 6 : If the length of a rectangle is increased by a% and breadth is increased by b%, then the area of rectangle will increase by/यदि किसी आयत की लंबाई को a% बढ़ाया जाए तथा इसकी चौड़ाई को b% बढ़ाया जाए, तो इसक क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ जाएगा?

$\therefore$ Required Increase/अभीष्ट वृद्धि% = $\left(a+b+\frac{ab}{100}\right)$%

Note: If a side is increased, take positive sign and if it is decreased, take negative sign. It is applied for two dimensional figures.

नोट: यह सूत्र वृत्त के लिए भी प्रयोग किया जाता है, जहां भुजा की जगह इसकी त्रिज्या रखी जाती है। ऋणात्मक चिन्ह कमी को तथा धनात्मक चिन्ह वृद्धि को सूचित करता है।

Rule 6 : If the side of a square is decreased by a%, then the area of square will decrease by

यदि किसी वर्ग की प्रत्येक भुजा a% घटाया जाए, तो इसका क्षेत्रफल कितने प्रतिशत घट जाएगा?

$\therefore$ Decrease/कमी% = $\left(-2a+\frac{a^2}{100}\right)$%

This formula is also applicable for circles. where decrease % of radius is given.

यह सूत्र के लिए भी प्रयोग जहां उसकी त्रिज्या में प्रतिशत कमी दी होगी।

Rule 6 : If the length, breadth and height of a cuboid are increased by a%, b% and c% respectively, then, Increase% in volume

यदि किसी घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊंचाई में क्रमशः a%, b% तथा c% की वृद्धि की जाए तो इसके आयतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

$\therefore$ Increase%/वृद्धि% $=\left[a+b+c+\frac{ab+bc+ca}{100}+\frac{abc}{(100)^2}\right]$%

Rule 9 : If every side of cube is increased by a%, then increase % in volume

यदि किसी घन की प्रत्येक भुजा को a% बढ़ाया जाए तो इसके आयतन में प्रतिशत वृद्धि होगी–

increase %/वृद्धि% = $\left(3a+\frac{3a^2}{100}+\frac{a^3}{(100)^2}\right)$%

This formula will also be used in calculating increase in volume of sphere. where increase in radius is given.

यह सूत्र गोले के आयतन में वृद्धि के लिए भी प्रयोग जहाँ, त्रिज्या को भुजा के बराबर रखेंगे।

Rule 10 : If a% of a certain sum is taken by 1st man and b% of remaining sum is taken by 2nd man and finally c% of remaining sum is taken by 3rd man, then if 'x' rupee is the remaining amount then,

यदि किसी राशि का a% पहला व्यक्ति लेता है, फिर बचे हुए राशि का b% दूसरा व्यक्ति लेता है तथा शेष राशि का c% तीसरा व्यक्ति लेता है तथा अंत में 'x' राशि बचता है, तो प्रारंभिक राशि थी–

Initial amount/प्रारंभिक राशि = $\frac{100\times 100\times 100x}{(100-a)(100-b)(100-c)}$

Final amount/अंतिम राशि = Initial amount/प्रारंभ राशि $\times\frac{(100-a)}{100}\times\frac{(100-b)}{100}\times\frac{(100-c)}{100}$

Rule 11 **:** If an amount is increased by a% and then again increased by b% and finally increased by c%, So, that resultant amount is 'x' rupees, then,

यदि एक राशि a% बढ़ती है, फिर b% बढ़ती है और आगे c% बढ़ती है, तो अंत में राशि 'x' रुपए हो जाती है, तो

प्रारंभिक राशि/Initial amount = $\frac{100\times 100\times 100x}{(100+a)(100+b)(100+c)}$

Final amount/अंतिम राशि = Initial amount/प्रारंभ राशि$\times\frac{(100+a)}{100}\times\frac{(100+b)}{100}\times\frac{(100+c)}{100}$

Rule 12: If the population/cost of a certain town/article, is P and annual increament rate is r%, then./ यदि किसी शहर/वस्तु का/की जनसख्या/कीमत P है, तथा प्रतिवर्ष यह r% की दर से बढ़ती है, तो

(i) After 't' years population/cost

't' वर्ष बाद जनसंख्या/कीमत = P $\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

(ii) Before 't' years population/cost

't' वर्ष पहले जनसंख्या/कीमत = $\frac{P}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}$

Rule 13 : If the population/cost of a town/article is P and it decreases/reduces at the rate of r% annually, then,

यदि किसी शहर/वस्तु का/की जनसंख्या/कीमत P है तथा यह r% प्रतिवर्ष की दर से घटती हैं तो

(i) After 't' years population/cost

't' वर्ष बाद जनसंख्या/कीमत = P $\left(1-\frac{r}{100}\right)^t$

(ii) Before 't' years population/cost

't' वर्ष पहले जनसंख्या/कीमत = $\left(1-\frac{r}{100}\right)^t$

Rule 14 **:** On increasing/decreasing the cost of a certain article by x%, a person can buy 'a' kg article less/more in 'y' rupees, then

किसी वस्तु की कीमत x% बढ़ने/घटने पर कोई व्यक्ति Rs. 'y' मे 'a' किलो ग्राम वस्तु कम/ज्यादा खरीद सकता है, तो

Increased/decreased cost of the article = $\left(\frac{xy}{100 \times a}\right)$ And initial cost/बढ़ा/घटा मूल्य (वस्तु का) = $\left(\frac{xy}{100 \times a}\right)$ तथा

= $\frac{xy}{(100 \pm x)a}$ [Negative sign when decreasing and positive sign when increasing]

प्रारंभिक कीमत = $\frac{xy}{(100 \pm x)a}$ [ऋणात्मक चिह्न कमी के लिए तथा धनात्मक चिह्न वृद्धि के लिए होता है।]

Rule 15: If a person saves 'R' rupees after spending x% on food, y% on cloth and z% on entertainment of his income then,

यदि एक व्यक्ति भोजन पर x%, कपड़े पर y% तथा मनोरंजन पर z% खर्च करने के बाद अपनी आय में से 'R' रुपए बचा लेता है, तो

Monthly income/मासिक आय = $\frac{100}{100-(x+y+z)} \times R$

Rule 16 **:** The amount of acid/milk is x% in 'M' litre mixture. How much water should be mixed in it so that percentage amount of acid/milk would be y%?

'M' लीटर मिश्रण में x% अम्ल/दूध है। इस मिश्रण में कितना पानी मिलाया जाए कि मिश्रण में अम्ल/दूध की मात्रा y% हो जाए?

$\therefore$ Amount of water/पानी की मात्रा = $\frac{M(x-y)}{y}$

Rule 17 **:** An examinee scored m% marks in an exam, and failed by p marks. In the same examination another examinee obtained n% marks and passed with q more marks than minimum, then.

एक परीक्षार्थी परीक्षा में m% अंक लाता है तथा p अंकों से अनुत्तीर्ण हो जाता है। परीक्षा में एक और परीक्षार्थी n% अंक लाता है तथा न्यूनतम से q ज्यादा अंक से उत्तीर्ण करता है, तो

$\therefore$ Maximum marks/पूर्णांक = $\frac{100}{(n-m)} \times (p+q)$

Rule 18 **:** In an examination, a% candidates failed in Maths and b% candidates failed in English. If c% candidate failed in both the subjects, then,

किसी परीक्षा में a% विद्यार्थी गणित में तथा b% विद्यार्थी अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण होते हैं। यदि c% विद्यार्थी दोनों विषयों में अनुतीर्ण है, तो

(i) Passed candidates in both the subjects/दोनों विषयों में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या = 100–(a+b–c)%

(ii) Percentage of candidates who failed in either subject /किसी भी एक विषय में फेल होने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत = (a + b – c)%

Rule 19 **:** In a certain examination passing marks is a%. If any candidate obtains 'b' marks and fails by 'c' marks, then,

किसी परीक्षा में, उत्तीर्णांक a% है। यदि कोई विद्यार्थी 'b' अंक लाता है वह 'c' अंकों से अनुत्तीर्ण हो जाता है,

$\therefore$ Total marks/कुल अंक = $\frac{100(b+c)}{a}$

Rule 20: In a certain examination, 'B' boys and 'G' girls participated. b% of boys and g% of girls passed the examination, then,

Percentage of passed students of the total students/ किसी परीक्षा में 'B' लड़कों तथा 'G' लड़कियों ने भाग लिया। b% लड़के तथा g% लड़कियाँ इस परीक्षा में उत्तीर्ण हुए, तो कुल विद्यार्थियों में उत्तीर्ण हुए विद्यार्थियों का प्रतिशत = $\left(\frac{B \times b \times G \times g}{B+G}\right)\%$

*Rule 21***:** If a candidate got A% votes in a poll and he won or defeated by 'x' votes, then, what was the total no. of votes which was casted in poll ?

यदि एक उम्मीदवार को चुनाव में A% वोट मिले तथा वह x वोट से जीत या हार गया तो, उस चुनाव में कुल कितने वोट पड़े?

$\therefore$ Total no. of votes/कुल वोटों की संख्या = $\frac{50x}{(50-A)}$ = $\frac{100x}{100-2A}$

Rule 22: If a number 'a' is increased or decreased by b%, then the new number will be $\left(\frac{100 \pm b}{100}\right) \times$ a/यदि किसी संख्या 'a' को b% बढ़ाया या घटाया जाता है तो नई प्राप्त संख्या होगी $\left(\frac{100 \pm b}{100}\right) \times$ a

Important results

जब a को a% से बढ़ाया जाता है तब कुल मान-

- 10 + 10 × 10% = 11
  20 + 20 × 20% = 24
  30 + 30 × 30% = 39
  40 + 40 × 40% = 56
  50 + 50 × 50% = 75
  60 + 60 × 60% = 96
  70 + 70 × 70% = 119
  80 + 80 × 80% = 144
  90 + 90 × 90% = 171
  100 + 100 × 100% = 200

जब a को a% से घटाया जाता है तब कुल मान-

- 10 – 10 × 10% = 9
  20 – 20 × 20% = 16
  30 – 30 × 30% = 21
  40 – 40 × 40% = 24
  50 – 50 × 50% = 25
  60 – 60 × 60% = 24
  70 – 70 × 70% = 21
  80 – 80 × 80% = 16

$90 - 90 \times 90\% = 9$

$100 - 100 \times 100\% = 0$

Rule 23 **:** If the present population of a town is P and the population increases or decreases at rate of R_1%, R_2% and R_3% in first, second and third year respectively. then the population of town after 3 years/यदि किसी शहर की जनसंख्या P है तथा जनसंख्या R_1 %, R_2 % तथा R_3 % की दर से पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष में बढ़ती/घटती है तो, शहर की जनसख्या 3 वर्ष बाद होगी $= \left(1 \pm \frac{R_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{R_2}{100}\right)\left(1 \pm \frac{R_3}{100}\right)$

'+' is used when population increases

'+' का इस्तेमाल जनसंख्या बढ़ने पर होगा।

'–' is used when population decreases.

'–' का इस्तेमाल जनसंख्या घटने पर होगा।

The above formula may be extended for n number of years.

Population after 'n' years/ इस प्रकार जनसंख्या 'n' वर्षों के बाद इस सूत्र को 'n' वर्षों के लिए भी लिखा जा सकता है,

$$= \left(1 \pm \frac{R_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{R_2}{100}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \left(1 \pm \frac{R_n}{100}\right)$$

प्रतिशत वृद्धि या कमी पर आधारित सूत्र/नियम

$$\text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{कुल वृद्धि} \times 100}{\text{प्रारम्भिक मान}}$$

$$\text{प्रतिशत कमी} = \frac{\text{कुल कमी} \times 100}{\text{प्रारम्भिक मान}}$$

➢ When a number x is increased or decreased by y%, then the new number will be

Rule 24 : किसी संख्या (x) में कुछ प्रतिशत (y%) की वृद्धि अथवा कमी करनी है, तो नई संख्या निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात की जा सकती है –

(i) Increase (new number)/वृद्धि होने पर नई संख्या $= \frac{100+y}{100} \times x$

(ii) Decrease (new number)/कमी होने पर नई संख्या $= \frac{100-y}{100} \times x$

➢ When there is an increase in the value, a positive (+) sign is used and when there is a decrease, a negative (–) sign is used./मूल्य में वृद्धि होने पर धनात्मक (+) चिह्न तथा कमी होने पर ऋणात्मक (–) चिह्न का प्रयोग करते हैं।

Rule 25: When the value of an object is first changed by a% and then changed (increased or decreased) by b%, then net effect/यदि किसी संख्या में क्रमश: a% व b% का बदलाव (कमी या वृद्धि) किया जाता है, तो कुल अथवा नेट प्रतिशत बदलाव

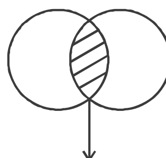
$$= \left[\pm a \pm b + \frac{(\pm a)(\pm b)}{100}\right]\%$$

➢ Net effect is a increase or b decrease according to the + ve or–ve sign, respectively of the final result./'a' व 'b' के चिह्न उनकी प्रकृति अर्थात् वृद्धि अथवा कमी पर निर्भर करते हैं। वृद्धि के लिए '+' व कमी के लिए '–' के चिह्न का प्रयोग करते हैं।

If two numbers are changed by a% and b% respectively, then the above formula is also used to find the total or net percentage change in the product of those two numbers./यदि दो संख्याओं में क्रमश: a% व b% का बदलाव किया जाता है, तो उन दोनों संख्याओं के गुणनफल में कुल अथवा नेट प्रतिशत बदलाव ज्ञात करने के लिए भी उपरोक्त सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

Basic Formula

1. Price × consumetion = Expenditure/मूल्य × खपत = खर्च
2. Gross Income – Income tax = Net Income.
   सकल आय – आय कर = शुद्धआय
3. Venn digram



$n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

4. $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$
5. Income = Expenditure + Saving./आय = खर्च + बचत
6. Time × wages = Earning/समय × वेतन = आय

PROFIT AND LOSS
लाभ और हानि

CHAPTER 02

When a person is purchased or sale of an item, then the profit or loss of some amount of money is called profit and loss.

जब कोई व्यक्ति किसी वस्तु को खरीदता या बेचता है, तो उसे कुछ धनराशि का फायदा या नुकसान होता है, उसे ही हम लाभ और हानि कहते है।

➢ *Cost Price/क्रय मूल्य:-* The cost price of an article is the price at which that article is bought, it is denoted by CP./किसी वस्तु का क्रय मूल्य वह मूल्य होता है जिस पर उस वस्तु को खरीदा जाता है इसे C.P से निरूपित करते है।

- *Overhead Expenses/ उपरिव्यय:-*The expenses incurred in bringing the purchased goods to the point of sale and its maintenance are called overheads expenses./खरीदी हुई वस्तु को ब्रिकी केन्द्र तक लाने तथा उसके रख रखाव में किए गए खर्च को उपरिव्यय कहते है।

Note:- Profit or loss is always on the cost price.

नोटः– लाभ या हानि हमेशा क्रय मूल्य (Cost Price) पर होता है।

- *Selling Price/*विक्रय मूल्य:-The selling price of an article is the price at which that article is sold. It is denoted by SP./किसी वस्तु का विक्रय मूल्य वह मूल्य है जिस पर उस वस्तु को बेचा जाता है। इसे S.P से निरूपित करते है।
- *Mark Price:-* The price which is written on the article is called marked price.

  अंकित मूल्यः– वस्तु पर जो मूल्य लिखा होता है, उसे अंकित मूल्य कहते हैं।

  Note:- Discount is always given on marked price.

  नोटः– बट्टा हमेशा अंकित मूल्य पर दिया जाता है।
- *Profit:-* When an article is sold at a price higher than its cost price, the situation is said to have a profit on the article.

  लाभः– जब किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य से अधिक मूल्य पर बेचा जाता है, तो इस स्थिति को वस्तु पर लाभ होना कहा जाता है।

  Cost price < Selling price then Profit

  क्रय मूल्य < विक्रय मूल्य तब लाभ

  C.P < S.P = P
- *Loss:-* When an article is sold at a price less than its cost price, then this situation is said to be a loss on the article.

  हानि:- जब किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य से कम मूल्य पर बेचा जाता है, तो इस स्थिति को वस्तु पर हानि होना कहा जाता है।

  Cost Price > Selling Price then Loss

  क्रय मूल्य > विक्रय मूल्य तब हानि

  C.P > S.P = L

Some Important Formula related to Profit and Loss
लाभ और हानि पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

- P = SP – C.P/लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य
- L = C.P – SP/ हानि = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य
- $\% P = \left(\frac{S.P-C.P}{C.P}\times 100\right)\%$/% लाभ $=\left(\frac{\text{विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}}\times 100\right)\%$
- $\% L = \left(\frac{C.P-S.P}{C.P}\times 100\right)\%$ /% हानि $=\left(\frac{\text{क्रय मूल्य– विक्रय मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}}\times 100\right)\%$
- $S.P = C.P \times \left(\frac{100+P\%}{100}\right) = CP \times \left(\frac{100-L\%}{100}\right)$
- $C.P = S.P \times \frac{100}{(100+P\%)} = S.P \times \frac{100}{(100-L\%)}$

Some Important Results of profit and loss
लाभ और हानि के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

- If two articles are sold at same price each at Rs. x one at a profit of y% and other at a loss of y% then.

  यदि दो वस्तुएं समान मूल्य x रूपये तथा एक को लाभ y% और दूसरी को हानि y% पर बेची जाए तो

  $\text{Loss} = \frac{y^2}{100}\%$
- Two article sold for rupees z each. On one, there is again of x% and on the other, there is a loss of y%. What is the overall gain or loss percent.

  दो वस्तुओं में से प्रत्येक को z रूपये के मूल्य पर बेचा जाता है। उनमें से एक वस्तु पर विक्रेता को x% लाभ होता है और दूसरी वस्तु पर y% की हानि होती है। विक्रेता को कुल मिलाकर कितने प्रतिशत लाभ अथवा हानि हुई।

  $\text{Overall Profit and Loss } \% = \frac{100(x-y)+2xy}{200+x+y}$

  If the value is positive then it will be profit percent and if negative then it will be loss percent.

  यदि मान धनात्मक हो तो लाभ प्रतिशत एवं ऋणात्मक हो तो हानि प्रतिशत होगा।
- A man sells his items at a profit/loss of x%. If he had sold it for Rs. R more, he would have gained/ loss y%. then

  एक आदमी अपनी वस्तुओं को x% के लाभ/हानि पर बेचता है। अगर उसने इसे R अधिक रूपये में बेचा होता। तो उसे y% का लाभ/हानि होता है, फिर

  $\text{CP of items} = \frac{R}{(y \pm x)}\times 100$

  '+' when one is profit and other is loss.

  '+' जब एक लाभ और दूसरा हानि हो।

  '–' = when both are either profit or loss.

  '–' = जब दोनों लाभ या हानि हो।
- If two Items are bought at same price each as Rs. x one at a profit of y% and other at a loss of y% then.

  यदि दो वस्तुएं समान मूल्य x रूपये तथा एक को लाभ y% और दूसरी को हानि y% पर खरीदी जाए तो

  No Profit. No Loss
- If an article is sold for Rs. X, the loss is as much as the profit is if it is sold for Rs. Y, then the cost price

  किसी वस्तु को X रु. में बेचने पर उतनी ही हानि होती है जितना कि Y रु. में बेचने पर लाभ होता है, तो क्रय मूल्य $= \frac{x+y}{2}$
- If the profit earned by selling an article for Rs.x is n times the loss incurred by selling it for Rs.y, then the cost price of the article

  यदि किसी वस्तु को x रु. में बेचने से प्राप्त लाभ उसे y रु. में बेचने पर उठाए गए हानि का n गुना हो, तो वस्तु का क्रय मूल्य $\frac{x+ny}{n+1}$

- If cost price of article x = selling price of article y, then percent profit or loss/यदि x वस्तु का क्रय मूल्य = y वस्तु का विक्रय मूल्य तो प्रतिशत लाभ अथवा हानि = $\frac{x-y}{y}\times100$

  Conclusion +ve then Profit, –ve then loss
  निष्कर्ष धनात्मक हो, तो लाभ होगा, ऋणात्मक हो तो हानि होगा।
- On selling 'x' articles the profit or loss is equal to selling of 'y' articles, then/'x' वस्तु को बेचने पर लाभ या हानि 'y' वस्तु को बेचने के बराबर हो, तो

  Profit% = $\frac{y\times100}{x-y}$, Loss % = $\frac{y\times100}{x+y}$
- If the value of percent profit by selling an article for Rs x% is equal to the cost price, then the cost price of the article is/किसी वस्तु को x% रु. में बेचने से होने वाले प्रतिशत लाभ का मान क्रय मूल्य के बराबर हो, तो वस्तु का क्रय मूल्य

  $= 10\times\sqrt{x+25}-50$
- If the percentage of loss incurred by selling an article for Rs. x is equal to the cost price, then the cost price of the article/किसी वस्तु को x रु. में बेचने से होने वाले प्रतिशत हानि का मान क्रय मूल्य के बराबर हो तो वस्तु का क्रय मूल्य $= 10\times\sqrt{25-x}+50$
- If a shopkeeper sells an article at its cost price by using a false weight of x gram instead of 1 kilogram, then his percentage profit is/अगर कोई दुकानदार 1 किलोग्राम की जगह पर x ग्राम का झूठे बाट इस्तेमाल करके किसी समान को उसके क्रय मूल्य पर ही बेचता है, तो उसका प्रतिशत लाभ

  $\frac{1000-x}{x}\times100$
- If a vendor used to sell his articles at x% loss on cost price but uses y grams instead of z grams, then his profit or loss% is/यदि एक विक्रेता अपने सामान को लगात मूल्य के x% हानि पर बेचता है लेकिन y ग्राम के बजाय z ग्राम का उपयोग करता है, तो उसका लाभ या हानि % है। $\left[(100-x)\frac{z}{y}-100\right]\%$

  [Profit or loss as per positive or negative sign.]
  [लाभ या हानि धनात्मक या नकारात्मक संकेत के अनुसार]
- A dishonest dealer defrauds to the extent of x% in buying as well as selling is goods by using faulty weight. What will be the gain percent on his outlay/एक बेईमान व्यापारी गलत बाटों का प्रयोग करके अपनी वस्तुओं को क्रय और विक्रय करते समय दोनों बार x% तक बेईमानी करता है उसकी लागत पर प्राप्त लाभ प्रतिशत क्या होगा

  Profit % = $\frac{2x}{100-x}\times100\%$
- If a person buys y articles for Rs. x and sells them at the rate of y for x, then
  यदि कोई व्यक्ति x रूपये के लिए y लेख खरीदता है, और उन्हें x के लिए y की दर से बेचता है, तब

  (i) $x > y\frac{x^2-y^2}{x^2}\times100$ (ii) $x < y\frac{y^2-x^2}{x^2}\times100$
- If a man purchases 'a' items for Rs. x and sells 'b' items for Rs. y, then his profit or loss percent is given by/अगर एक आदमी x रूपये के लिए 'a' वस्तुएं खरीदता है। और y रूपये के लिए 'b' वस्तुएं बचेता है, तो लाभ या हानि प्रतिशत $= \left(\frac{ay-bx}{bx}\right)\times100\%$

DISCOUNT
बट्टा
CHAPTER
03

The discount which is given at the time of selling the article is called discount./वस्तु को बेचते समय जो छूट दी जाती है, बट्टा कहलाती है।

(i) D = M.P – S.P/छूट = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य
M.P = SP + D/अंकित मूल्य = विक्रय मूल्य + छूट
S.P = M.P – D/विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – छूट

(ii) Discount% = $\frac{D}{M.P}\times100$/छूट% = $\frac{\text{छूट}}{\text{अंकित मूल्य}}\times100$

(iii) S.P= $\frac{M.P\times(100-D\%)}{100}$ /विक्रय मूल्य = $\frac{\text{अंकित मूल्य}\times(100-\text{छूट\%})}{100}$

M.P = $\frac{S.P\times100}{100-D\%}$ /अंकित मूल्य = $\frac{\text{विक्रय मूल्य}\times100}{(100-\text{छूट\%})}$

(iv) If mark price is given and also discount (D_1% D_2% ....) are given then, selling price is
यदि अंकित मूल्य दिया गया हो और छूट (D_1%, D_2% ....) दी जाती है, तो विक्रय मूल्य

S.P = M.P × $\left(\frac{100-D_1\%}{100}\right)\times\left(\frac{100-D_2\%}{100}\right)$......./विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य × $\frac{(100-\text{छूट}_1\%)}{100}\times\frac{(100-\text{छूट}_2\%)}{100}$.....

C.P = $\frac{M.P(100-D\%)}{(100+P\%)}$ /क्रय मूल्य = $\frac{\text{अंकित मूल्य }(100-\text{छूट\%})}{(100+\text{लाभ\%})}$

(v) Two Equivalent Discount are given then
दो समतुल्य बट्टा x%, y% दिया गया हो तब

$x + y - \frac{xy}{100}\%$

Ex. equivalent discount of 30%, 20%/30, 20% का समतुल्य बट्टा

$$\left(30+20-\frac{30\times20}{100}\right)\% = (50-6)\% = 44\% \text{ discount}$$

(vi) Three Equivalent Discount are given then
तीन समतुल्य बट्टा x%, y%, z% दिया गया हो तब

$$(x+y+z)-\frac{xy+yz+zx}{100}+\frac{xyz}{10000}\%$$

*Ex.*equivalent discount of 5%, 7%, 8%
5%, 7%, 8% का समतुल्य बट्टा

$$=(5+7+8)-\left(\frac{35+56+40}{100}\right)+\frac{5\times7\times8}{10000}$$

$= 20 - 1.31 + 0.0280 = 18.718\%$

Free article (मुफ्त वस्तु)

(vii) 'y' articles (quantity/number)are given free on purchasing 'x' articles. Then,/ 'x' वस्तु खरीदने पर 'y' वस्तु (मात्र/संख्या) निःशुल्क दी जाती है। फिर,

$$\text{Discount/छूट } \% = \frac{y\times100}{x+y}$$

$$\text{or, } D\% = \frac{\text{No. of Free Articles} \times 100}{\text{Total articles}}$$

Where, y = No. of Free Articles
x + y = Total articles

Ex. Buy 3 Get 2 Free/3 खरीदे 2 मुफ्त पाए:-

$$\frac{2}{5}\times100 = 40\% \text{ discount}$$

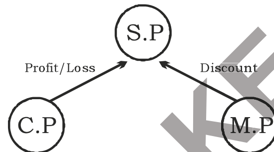
(x) 20% + Buy 3 Get 1 Free

$$\frac{1}{4}\times100 = 25\% \text{ Discount}$$

20%, 25%

$$\left(20+25-\frac{20\times25}{100}\right)\% = (45-5)\% = 40\% \text{ discount}$$

(xi)



CP×Profit or loss%=MP×D%
क्रय मूल्य×लाभ/हानि%=अंकित मूल्य × छूट %

$$CP = \frac{MP \times D\%}{P\%} = \frac{MP \times D\%}{L\%}$$

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{\text{अंकित मूल्य} \times \text{छूट } \%}{\text{लाभ } \%} = \frac{\text{अंकित मूल्य} \times \text{छूट } \%}{\text{हानि } \%}$$

(xii) $\frac{CP}{MP} = \frac{100-D\%}{100+P\%}$ / $\frac{CP}{MP} = \frac{100-D\%}{100-L\%}$

$$\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{100-\text{छूट}\%}{100 \pm \text{लाभ/हानि}\%}$$

Miscellaneous (विविध)

(i) A tradesman marks his goods r% above his cost price. If he allows his customers a discount of r_1% on the marked price. Then the profit of loss percent is/एक व्यापारी अपने माल पर क्रय मूल्य से r% अधिक मूल्य अंकित करता है। यदि वह अपने ग्रहकों को अंकित मूल्य पर r_1% की छूट देता हैं तो लाभ या हानि प्रतिशत है।

$$\frac{r\times(100-r_1)}{100} - r_1$$

(Positive sign signifies profit and negative sign signifies loss)./(धनात्मक चिन्ह लाभ को दर्शाता है और ऋणात्मक चिन्ह हानि को दर्शाता है)।

(ii) The marked price of an article is fixed in such a way that after allowing a discount of r%, a profit of R% is obtained. Then the marked price of the article is $\left(\frac{r+R}{100-r}\times100\right)\%$ more than its cost price.

एक वस्तु का अंकित मूल्य इस प्रकार निर्धारित किया जाता है कि r% की छूट देने के बाद, R% का लाभ प्राप्त होता है। तब वस्तु का अंकित मूल्य उसके क्रय मूल्य से $\left(\frac{r+R}{100-r}\times100\right)\%$ अधिक है।

SIMPLE INTEREST
साधारण ब्याज
CHAPTER 04

Simple Interest: A quick and easy method of calculating the interest charge on a loan, which is determined by multiplying the daily interest rate by the principal by the number of days that elapse between payments and it is denoted by 'S.I'.

साधारण ब्याज: एक ऋण पर ब्याज शुल्क की गणना करने का एक त्वरित और आसान तरीका, जो भुगतान के बीच बीतने वाले दिनों की संख्या से मूलधन द्वारा दैनिक ब्याज दर को गुणा करके निर्धारित किया जाता है।

Principal (P): Borrowed money is called principal and it is denoted by 'P'.

मूलधन: उधार लिया हुआ पैसा मूलधन कहलाता है और इसे 'P' से दर्शाया जाता है।

Time period (T) or (t):- Money is borrowed for certain time period, that time is called interest time and it is denoted by 'T' or 't'./

समय सीमा:- पैसा एक निश्चित समय अवधि के लिए उधार लिया है, उस समय को ब्याज समय कहा जाता है और इसे 'T' या 't' द्वारा दर्शाया जाता है।

Interest Rate (R, r):- The interest rate is the amount lender charge a borrower and is a percentage of the principal- (the amount loaned) and it is denoted by 'R' or 'r'.

ब्याज दर:- ब्याज दर वह राशि है जो एक ऋणदाता एक उधारकर्ता से वसूल करता है और मूलधन का कुछ निश्चित प्रतिशत होता है और इसे 'R' या 'r' से दर्शाया जाता है।

Amount (A):- The principal (P) becomes amount when interest is added to it and it is denoted by 'A'.

मिश्रधन: मूलधन, मिश्रधन तब बन जाता है जब इसमें ब्याज जोड़ा जाता है और मिश्रधन को 'A' से दर्शाया जाता है।

- Amount = Principal + Interest/मिश्रधन= मूलधन + ब्याज
  A = P + SI and, SI = A – P
  ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

- Simple Interest = $\dfrac{\text{Principal} \times \text{Rate} \times \text{Time}}{100}$

  साधारण ब्याज = $\dfrac{\text{मूल धन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

  or, $\boxed{SI = \dfrac{P \times R \times T}{100}}$ than, $\boxed{P = \dfrac{SI \times 100}{R \times T}}$

  and, $\boxed{R = \dfrac{SI \times 100}{P \times T}}$ and, $\boxed{T = \dfrac{SI \times 100}{P \times R}}$

  So, Amount = Principal + $\dfrac{\text{Principal} \times \text{rate} \times \text{time}}{100}$

  or, $\boxed{A = P + \dfrac{P \times R \times T}{100}}$

- If simple interest is calculated on different bases like/यदि साधारण ब्याज की गणना विभिन्न आधारों पर की जाती है जैसे–

	Rate(r)	Time(t)
1. Annually/वार्षिक	r%	t years
2. Half yearly/अर्ध वार्षिक	$\frac{r}{2}$%	t×2years
3. Quarterly year/तिमाही वार्षिक	$\frac{r}{4}$%	t×4 years
4. Monthly/मासिक	$\frac{r}{12}$%	t×12 years

- If there are distinct rate of interests for distinct time periods:/यदि अलग-अलग समय अवधि के लिए ब्याज की अलग-अलग दर है जैसे
- Rate for 1st t_1 years/पहले t_1 वर्ष के लिए दर$\rightarrow R_1$ %
- Rate for 2nd t_2 years/दूसरे t_2 वर्ष के लिए दर $\rightarrow R_2$ %
- Rate for 3rd t_3 years/तीसरे t_3 वर्षों के लिए दर $\rightarrow R_3$ %
  Then, total S.I for (t_1 + t_2 + t_3) year/फिर, (t_1 + t_2 + t_3) साल के लिए कुल S.I = $\dfrac{P(R_1t_1 + R_2t_2 + R_3t_3)}{100}$
- The difference between the SI for a certain sum P_1 deposited for time T_1 at R_1 rate of interest and another sum P_2 deposited for time T_2 at R_2 rate of interest is/ब्याज की R_1 दर पर T_1 समय के लिए जमा की गई एक निश्चित राशि P_1 के लिए साधारण ब्याज और R_2 ब्याज दर पर T_2 समय के लिए जमा की गई दूसरी राशि P_2 के लिए साधारण ब्याज के बीच का अंतर–

  SI = $\dfrac{P_2R_2T_2 - P_1R_1T_1}{100}$
- If a certain sum P becomes 'n' times of itself in t years on Simple Interest, then the rate percent per annum is/यदि एक निशिचित राशि P साधारण ब्याज पर t वर्ष में स्वयं की 'n' गुनी हो जाती है, तो वार्षिक दर प्रतिशत है।

  $R\% = \dfrac{(n-1)}{T} \times 100\%$ and, $T = \dfrac{(n-1)}{R} \times 100\%$
- If a certain sum P become n_1 times of itself at R_1% rate and n_2 times of itself at R_2% rate, on SI then, यदि एक निश्चित राशि P, R_1% दर पर स्वयं का n_1 गुना और R_2% दर पर स्वयं का n_2 गुना हो जाती है, तो

  $R_2 = \dfrac{(n_2-1)}{(n_1-1)}R_1$ and $T_2 = \dfrac{(n_2-1)}{(n_1-1)}T_1$
- If Simple Interest (SI) becomes 'n' times of principal i.e. S.I = P × n, then/यदि साधारण ब्याज मूलधन का 'n' गुना हो जाता है अर्थात् SI = p × n, तो

  Rate = $\dfrac{n \times 100}{\text{time}}$ and time = $\dfrac{n \times 100}{\text{rate}}$
- If an amount (A) becomes 'n' times of certain sum (P) i.e. $\boxed{A = P \times n}$ then/यदि कोई मिश्रधन (A) निश्चित राशि (P) का 'n' गुना हो जाती है जैसे $\boxed{A = P \times n}$ तो

  Rate = $\dfrac{(n-1) \times 100}{\text{time}}$ and time = $\dfrac{(n-1) \times 100}{\text{rate}}$
- If the difference between two simple interests (SI) is 'a' calculated at different annual rates and times, then principal (P) is/यदि दो साधारण ब्याज के बीच के अंतर 'a' की गणना अलग-अलग वार्षिक दरों और समय पर की जाती है, तो मूलधन (P) है।

  P = $\dfrac{a \times 100}{(\text{diff. in rate}) \times (\text{diff. in time})}$
- If a sum amount to x_1 in t years and then this sum amount to x_2 in t years. Then the sum is given by यदि कोई राशि t वर्षों में x_1 हो जाती है और फिर यह राशि t वर्षों में x_2 हो जाती है। तब मूलधन

  P = $\dfrac{(\text{Diff. in amount}) \times 100}{(\text{Change in interest Rate}) \times \text{time}}$

- If a sum with simple interest rate, amount to 'x' in t_1 years and 'y' in t_2 years, then/यदि साधारण ब्याज दर वाली राशि t_1 वर्षों में 'x' और t_2 वर्षों में 'y' हो जाती है, तो

$$R\% = \left[\frac{y - x}{xt_2 - yt_2}\right] \times 100 \text{ and, } P = \frac{xt_2 - yt_1}{t_2 - t_1}$$

- If simple interest is $\frac{x}{y}$ of principal amount and rate of interest and time is equal then,/यदि साधारण ब्याज मूल राशि का $\frac{x}{y}$ है और ब्याज की दर और समय बराबर है, तो

$$\text{Time} = \text{Rate} = \sqrt{\frac{x}{y} \times 100}$$

- If a sum (P) becomes amount (A_1) at r % in t years on SI. Then the difference between the amount (A_2) if the P is lent at (r + 1)% for t years is:/यदि कोई मूलधन (P), r % की दर से t सालों में साधारण ब्याज पर मिश्रधन (A_1) बन जाता हैं तो सामान राशि (P) को (r + 1)% की दर से t सालों के लिए साधारण ब्याज पर लगाने से प्राप्त हुई राशि (A_2) के बीच अंतर–

$$\boxed{\text{Difference}(A_2 - A_1) = \frac{P \times 1 \times t}{100}}$$

- If a sum 'P' divided in 3 parts i.e. P_1, P_2, P_3 and then each part lent at r_1%, r_2%, r_3% rates for t_1, t_2, t_3 years respectively at simple interest and
यदि किसी मूलधन 'P' को तीन भागों i.e. P_1, P_2, P_3 में बाट कर r_1%, r_2%, r_3% की दर से t_1, t_2, t_3 सालों के लिए साधारण ब्याज पर दिया जाता है, और

(a) If SI received from all 3 parts are equal, then/यदि 3 भागों से साधारण ब्याज समान प्राप्त हो, तो

$$\boxed{P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{r_1 t_1} : \frac{1}{r_2 t_2} : \frac{1}{r_3 t_3}}$$

(b) If amount (P + SI) received from all 3 parts are equal, then/यदि 3 भागों से मिश्रधन (P + SI) समान प्राप्त हो, तो

$$\boxed{P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{100 + r_1 t_1} : \frac{1}{100 + r_2 t_2} : \frac{1}{100 + r_3 t_3}}$$

- If interest on principal (P) at r% simple interest rate is about to be given in (t) years. Then the amount of each instalment
यदि मूलधन पर r% साधारण ब्याज दर पर ब्याज t वर्षों में दिया जाने वाला है, तो प्रत्येक समान किस्त की राशि।

$$\text{Each equal Instalment} = \boxed{\frac{P \times 100}{100 \times t + \frac{rt(t-1)}{2}}}$$

$$\text{or, } \boxed{\frac{P \times 100}{100 \times t + [(t-1) + (t-2) + \ldots..] \times r}}$$

- To find the rate of interest under current deposit plan/वर्तमान जमा योजना के तहत ब्याज दर का पता लगाने के लिए।

$$\text{Rate} = \frac{SI \times 2400}{n(n+1) \times (\text{deposited amount})}$$

where n = no. of months

COMPOUND INTEREST
चक्रवृद्धि ब्याज

CHAPTER
05

Compound Interest (CI) : The interest on a loan or deposit calculated based on both the intial principal and the accumulated interest from previous periods and it is denoted by 'CI'.

चक्रवृद्धि ब्याज: एक ऋण या जमा राशि पर ब्याज की गणना प्रारंभिक मूलधन और पिछली अवधियों के संचित ब्याज दोनों के आधार पर की जाती है और इसे 'CI' द्वारा निरूपित किया जाता है।

Abbreviations/संक्षेपाक्षर

- CI : Compount Interest/चक्रवृद्धि ब्याज
- P : Principal/मूलधन
- A : Amount/मिश्रधन
- R/r : Rate/दर
- T/t : Time/समय

- Amount = Principal + Interest
- Interest = Amount - Principal
- $\boxed{\text{Amount} = \text{Principal}\left[1 + \frac{\text{rate}}{100}\right]^{\text{time}}}$

$$\text{or, } A = P\left[1 + \frac{r}{100}\right]^t$$

$$\text{and, } CI = P\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1\right]$$

➢ *If compounded is calculated on different bases like*
यदि चक्रवृद्धि ब्याज की गणना विभिन्न आधारों पर की जाती है जैसे–

		Rate(r)	Time(t)
1.	Annually/वार्षिक	r%	t years
2.	Half yearly/अर्ध वार्षिक	$\frac{r}{2}\%$	t×2years
3.	Quarterly year/तिमाही वार्षिक	$\frac{r}{4}\%$	t×4 years
4.	Monthly/मासिक	$\frac{r}{12}\%$	t×12 years

➢ If there are distinct rate of interests (r) for distinct time period i.e./यदि अलग-अलग समय अवधि के लिए अलग-अलग ब्याज की दरे है, जैसे-

Rate for 1st year/प्रथम वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_1\%$

Rate for 2nd year/द्वितीय वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_2\%$

Rate for 3rd year/तीसरे वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_3\%$ and so on then, /और आगे इस तरह तो,

$$A = P\left[1+\frac{r_1}{100}\right]\left[1+\frac{r_2}{100}\right]\left[1+\frac{r_3}{100}\right]........\text{so on}$$

and, CI = A – P

➢ If the time is given in fractional form eg. $3\frac{1}{3}$, then /यदि समय भिन्नात्मक रूप में दिया गया है, जैसे $3\frac{1}{3}$ तो,

$$\boxed{CI = P\left[1+\frac{r}{100}\right]^3\left[1+\frac{\frac{1}{3}r}{100}\right]-P}$$

➢ If an amount becomes 'n' times in 't' times period at the rate of compound interest then, time taken to becomes 'n^m' times for the same amount is equal to $\boxed{t\times m}$ years./एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 'n' वर्षों में स्वयं का 't' गुना हो जाती है, तो इसे स्वयं का 'n^m' गुना होने में लगने वाला समय $\boxed{t\times m}$ होगा।

Example:- An amount becomes double in 3 years on compound interest. Then in how many years it will become 8 times of itself?/यदि एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 3 वर्ष में स्वयं का दो गुना हो जाती है, तो इसे स्वयं का 8 गुना होने में कितना समय लगेगा?

$\Rightarrow 8 = 2^3 \quad \therefore$ Time = 3 × 3 = 9 years

➢ Difference between CI and SI on a sum 'P' at rate of r%

1. For 2 years is:

$$\text{CI-SI} = \text{Principal} \times \left[\frac{\text{rate}}{100}\right]^2 \text{ or } p \times \left[\frac{R}{100}\right]^2$$

$$\text{and } P = \frac{(CI-SI)\times100\times100}{R^2}$$

2. For 3 years is

$$\text{CI-SI} = \text{Principal} \times \left[\frac{\text{Rate}}{100}\right]^2 \times \left[3+\frac{\text{Rate}}{100}\right]$$

$$\text{or, CI - SI} = P\left(\frac{R}{100}\right)^2\left(3+\frac{R}{100}\right)$$

➢ If a sum 'P' becomes 'n' times of itself in 't' years on CI, then/यदि एक निश्चित 'P', चक्रवृद्धि ब्याज पर 't' सालों में स्वयं का 'n' गुना हो जाता है, तो

$$R\% = \left[n^{\frac{1}{t}}-1\right]\times100$$

➢ A certain sum at CI becomes 'n' times in 't_1', year and 'm' times in 't_2' years, then/एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर t_1 सालों में स्वयं का n गुना और t_2 सालों में m गुना हो जाती है, तो

$$\left[n^{\frac{1}{t_1}} = m^{\frac{1}{t_2}}\right]$$

➢ If on compound interest, a sum becomes Rs. A in 't_1' years and Rs. B in 't_2' years then,/यदि चक्रवृद्धि ब्याज पर एक राशि 't_1' साल में A रूपये हो जाती है और 't_2' साल में B रूपये हो जाती है, तो

(i) If $t_2 - t_1 = 1$, then $R\% = \left(\frac{B}{A}-1\right)\times100\%$

(ii) If $t_2 - t_1 = 2$ then $R\% = \left[\sqrt{\frac{B}{A}}-1\right]\times100\%$

(iii) If $t_2 - t_1 = n$, then $R\% = \left[\sqrt[n]{\frac{B}{A}}-1\right]\times100\%$

Where n is a whole number

जहां n एक पूर्ण संख्या है।

Effective/Successive rate in Compound Interest

प्रभावी दर चक्रवृद्धि ब्याज में

For 2 years/दो साल के लिए:-

(a) If rate of interest in 1st year is x% and in 2nd year is y%, then effective rate/प्रभावी दर $=\left[x+y+\frac{xy}{100}\right]\%$

Interest rates to remember				
Rates for	for 2 yr.	CI-SI for 2yr.	For 3 yr.	CI-SI for 3 yr.
1%	2.01%	0.01%	3.0301%	0.0301%
2%	4.04%	0.04%	6.1208%	0.1208%
3%	6.09%	0.9%	9.2727%	0.2727%
4%	8.16%	0.16%	12.4864%	0.4864%
5%	10.25%	0.25%	15.7625%	0.7625%
10%	21%	1%	33.1%	3.1%
15%	32.25%	2.25%	52.0875%	7.0875%
20%	44%	4%	72.8%	12.8%
25%	56.25%	6.25%	95.3125%	20.3125%
30%	69%	9%	119.7%	29.7%

(b) If rate is same in both years, then/यदि दोनों साल की दर समान हो, तो

effective rate/प्रभावी दर = $\left[2r + \frac{r^2}{100}\right]\%$

For 3 years/तीन साल के लिए

(a) If rate is x%, y% and z% in 1^{st} year, 2^{nd} year and 3^{rd} year respectively, then/यदि पहले साल, दूसरे साल और तीसरे साल की दर x%, y% और z% है, तो

effective rate/प्रभावी दर

$= \left[(x+y+z) + \frac{(xy+yz+zx)}{100} + \frac{xyz}{10000}\right]\%$

(b) If rate is r% for each 3 years
यदि प्रत्येक 3 साल की दर r% है

Effective rate/प्रभावी दर $= \left[3r + \frac{3r^2}{100} + \frac{r^3}{(100)^2}\right]\%$

1. *Golden Ratio of CI:-*

- 2 years = 2 : 1
- 3 years = 3 : 3 : 1
- 4 years = 4 : 6 : 4 : 1
- 5 years = 5 : 10 : 10 : 5 : 1
- 6 years = 6 : 15 : 20 : 15 : 6 : 1

and so on.

➢ *Difference between CI & SI/*
CI और SI के बीच का अंतर:–

If $r = \frac{1}{a}$, t = 3 years, then $p = a^3$.

So,

	1^{st} year	2^{nd} year	3^{rd} year
SI ⟶	a^2	a^2	a^2
CI ⟶	a^2	a^2+a	$a^2+a+a+1$
Diff.(d) ⟶	0	a	2a+1
	(d_1)	(d_2)	($2d_2+d_2$ का R%)
	CI–SI for 1st year	CI–SI for 2nd year	CI–SI for 3rd year

Now we know,

(i) CI – SI for 1 year is always 0 and CI = SI for 1^{st} year

(ii) CI – SI for 2 years is d_2 or a.

(iii) CI – SI for 3 years is $3d_2$ + r% of d_2 or 3a+1

Now we can say the ratio for 3 years of (CI – SI) and principal is $\boxed{\frac{(3a+1)}{a^3}}$

Some General Results

1.

Sum		Amount
a	$\xrightarrow{t\ year}$	b
a^2	$\xrightarrow{2t\ year}$	b^2
a^3	$\xrightarrow{3t\ year}$	b^3

2.

Sum		Amount
a	$\xrightarrow{t\ year}$	b
$\sqrt[2]{a}$	$\xrightarrow{\frac{t}{2}\ year}$	$\sqrt[2]{b}$
$\sqrt[3]{a}$	$\xrightarrow{\frac{t}{3}\ year}$	$\sqrt[3]{b}$

3. Sum (A) $\xrightarrow{t\ year}$ Amt. (B)
Sum (A) $\xrightarrow{next\ t\ year}$ Amt. (B)
Sum (A) $\xrightarrow{next\ t\ year}$ Amt. (B)

4. If $R = \frac{1}{x}$ and T = 3 years, then $P = x^3$

⟹	1^{st} year	2^{nd} year	3^{rd} year
CI ⟶	x^2	x^2+x	$x^2+x+x+1 = (x^2+2x+1) = (x+1)^2$

CI of 3rd year = $(x+1)^2$

INSTALMENT/किस्त

➢ If a sum 'P' is borrowed at R% annual CI which is to be paid in 'n' equal annual instalments including interest then,/यदि एक राशि 'P' को R% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया जाता है, जिसका भुगतान ब्याज सहित 'n' समान वार्षिक किस्तों में किया जाना है, तो

(i) for n = 2,
each annual instalment/प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left[\frac{100}{100+R}\right] + \left[\frac{100}{100+R}\right]^2}$$

(ii) for n = 3,
Each annual instalment/प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left[\frac{100}{100+R}\right] + \left[\frac{100}{100+R}\right]^2 + \left[\frac{100}{100+R}\right]^3}$$

(iii) for n = x,
Each annual instalment/प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left[\frac{100}{100+R}\right] + \left[\frac{100}{100+R}\right]^2 + \left[\frac{100}{100+R}\right]^3 \ldots \left[\frac{100}{100+R}\right]^x}$$

Where x is a natural number/जहां x एक प्राकृतिक संख्या है।

RATIO AND PROPORTION
अनुपात एवं समानुपात

CHAPTER 06

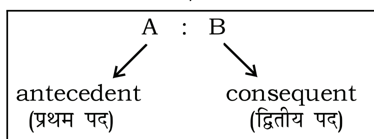
Ratio:-The comparative relation between two amounts/Quantities of same type is called Ratio.
अनुपातः- एक ही प्रकार की दो राशियों/मात्राओं के बीच के तुलनात्मक संबंध को अनुपात कहते हैं।

$\frac{a}{b}$ is the ratio of a to b is written as a : b and read "a is to b", where 'a' is called the antecedent and 'b' is called the 'consequent'.

$\frac{a}{b}$ अनुपात है, a से b के अनुपात को a : b के रूप में लिखा जाता है और "a से b" का अनुपात पढ़ा जाता है, जहाँ 'a' को 'पूर्ववर्ती' कहा जाता है और 'b' को 'परिणामी' कहा जाता है।

Ratio always occurs between same units.
अनुपात हमेशा समान इकाइयों के बीच होता है।

as/जैसे - Rupees : Rupees/रुपये : रुपये
gram : gram/ग्राम : ग्राम
kilogram : kilogram/किलोग्राम : किलोग्राम
minutes : minutes/मिनट : मिनट
Hour : Hour etc./घंटा : घंटा



If x : y :: p : q then x and q are called extreme, y and q are called mean./ यदि x : y :: p : q तो x और q उच्चतर मान कहलाते है तथा y और p माध्य कहलाते है

Product of extreme = product of mean/उच्चतर मान का गुणनफल = माध्य का गुणनफल
i.e, $x \times q = y \times p$

Definition of different types of ratio/विभिन्न प्रकार के अनुपात की परिभाषा:-

(A) ***Mixed ratio/*मिश्रित अनुपात**
Let x : y and p : q be two ratio then mixed ratio is
मान लीजिए x : y और p : q दो अनुपात हैं तो मिश्रित अनुपात है
$\boxed{xp : yq}$

(B) **Duplicate Ratio/डुप्लिकेट अनुपात**
The mixed Ratio of two equal ratio is called the duplicate Ratio/दो समान अनुपातों के मिश्रित अनुपात को द्विगुणित अनुपात कहते हैं
Let Ratio is p : q
it's duplicate ratio $p^2 : q^2$,
माना अनुपात p : q है
इसका डुप्लीकेट अनुपात है $p^2 : q^2$,

(C) **Subduplicate ratio/सबडुप्लीकेट अनुपातः**
The square root of a certain ratio is called its subduplicate ratio.
The subduplicate ratio of p : q = $\sqrt{p} : \sqrt{q}$
सबडुप्लीकेट अनुपात किसी निश्चित अनुपात का वर्गमूल उसका सबडुप्लीकेट अनुपात कहलाता है।
सबडुप्लीकेट अनुपात p : q का = $\sqrt{p} : \sqrt{q}$

(D) **Triplicate Ratio/ट्रिप्लिकेट अनुपात**
The cube of a certain ratio is called Triplicate Ratio/एक निश्चित अनुपात का घन त्रिगुण अनुपात कहलाता है।
The Triplicate Ratio of/त्रिगुण अनुपात p : q का = $p^3 : q^3$

(E) **Subtriplicate Ratio/सबट्रिप्लिकेट अनुपात**
The cube root of a certain ratio is called subtriplicate ratio./एक निश्चित अनुपात के घनमूल को सबट्रिप्लिकेट अनुपात कहा जाता है।
The subtriplicate of ratio p : q/p : q अनुपात का उपट्रिप्लिकेट = $\sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{q}$

(F) **Inverse ratio or Reciprocal Ratio/उलटा अनुपात या प्रतिलोम अनुपात**
Reciprocal of antcedent and consequent./पूर्ववर्ती और परिणामी का व्युत्क्रम।
Reciprocal or inverse ratio of p : q/p : q का व्युत्क्रम या प्रतिलोम अनुपात

$\Rightarrow \frac{1}{p} : \frac{1}{q}$ or $\left[\frac{1}{p} : \frac{1}{q}\right] \times$ L. C. M

➢ **Proportion/समानुपातः-** when two ratio are equal to each other then they are called proportional as
जब दो अनुपात एक दूसरे के बराबर होते हैं तो उन्हें समानुपातिक कहा जाता है
a : b = c : d then/तब a, b, c & d are in proportion/ समानुपात में है?
or a : b :: c : d
e.g. 3 : 7 = 12 : 28
then we write/फिर हम लिखते हैं 3 : 7 :: 12 : 28

• **Directly Proportional./सीधे आनुपातिक**
If x = ky, where k is constant/यदि x = ky, जहाँ k स्थिर है then we say that x is directly proportional to y. If it is written as follow.
तब हम कहते हैं कि x, y के समानुपाती है। अगर इसे निम्न रूप में लिखा गया है।

$\boxed{x \propto y}$

- **Inversely Proportional/व्युत्क्रमानुपाती**

  if $x = \frac{k}{y}$, where k is a constant./यदि $x = \frac{k}{y}$, जहाँ k एक अचर है।
  Then we say that x is inversely proportional to y, it is written as
  तब हम कहते हैं कि x, y के व्युत्क्रमानुपाती है इसे इस प्रकार लिखा जाता है $\boxed{x \alpha \frac{1}{y}}$
- It does not change the ratio, when we multiply or divide antecedent and consequent of the ratio by a same non-zero number as
  यह अनुपात नहीं बदलता है, जब हम पूर्ववृत्त को गुणा या विभाजित करते हैं और अनुपात के परिणामस्वरूप एक ही गैर-शून्य संख्या के रूप में

  e. g, $a : b = \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

  $ac : bc = a : b$
- What should be added to all of a, b, c, d so that these become proportional respectively?/a, b, c, d सभी में क्या जोड़ा जाए कि ये क्रमश: समानुपातिक हो जाएँ?
  Let x Should be added/मान लीजिए x जोड़ने पर

  then/तो $\frac{a+x}{b+x} :: \frac{c+x}{d+x}$
- **Invertendo/विलोमानुपात**
  The proportion in which antecedent and consequent quantities change their places is called invertendo/जिस अनुपात में पूर्ववर्ती और परिणामी मात्राएँ अपना स्थान बदलती हैं, उसे उलटा कहा जाता है
  Invertendo/विलोमानुपात a : b = c : d is b : a = d : c

  OR $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- **Alternendo**/अल्टरेंडो
  If a : b :: c : d is a proportion then its/यदि a : b :: c : d एक समानुपात है तो इसका
  Alternedo is a : c :: b : d/अल्टरनेडो है a : c :: b : d
- **Componendo/**योगानुपात
  If a : b :: c : d is a proportion/एक अनुपात है
  then componendo is/तो योगानुपात है (a+b) : b :: (c + d) : d
- **Dividendo/**अंतरानुपात
  If a : b :: c : d is a proportion/यदि a : b :: c : d एक समानुपात है
  then dividendo is a – b : b :: c – d : d.
  तो अंतरानुपात a – b : b :: c – d : d. है।
- **Componendo and dividendo/**योगान्तरानुपात
  If a : b :: c : d is a proportion./यदि a : b :: c : d समानुपात है, तो a + b : a – b :: c + d : c – d

➢ **Concept of proportion (समानुपात की अवधारणा)**
There are 4 types of Proportion./अनुपात में 4 प्रकार के अवधारणा निम्न है:

(i) First Proportional/प्रथम समानुपाती

$x : a :: b : c \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

First Proportional/प्रथम समानुपतिक $\therefore \boxed{x = \frac{ab}{c}}$

(ii) Mean Proportion/मध्य समानुपाती
a : x :: x : b

$\therefore \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{ab}}$

(iii) Third Proportion/तृतीय समानुपाती
a : b :: b : x

i.e $\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Rightarrow x = \frac{b^2}{a}$

(iv) fourth Proportion/चतुर्थ समानुपाती
a : b :: c : x

i.e $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{bc}{a}}$

Sum other formulas/ कुछ अन्य नियम

(v) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c+e}{d+f}$

If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{c-e}{d-f} = \frac{a-e}{b-f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$

➢ Law of Ratio/अनुपात का नियम

I : II :: III : IV or $\frac{I}{II} = \frac{III}{IV}$

(i) I $= \frac{II \times III}{IV}$

(ii) II $= \frac{I \times IV}{III}$

(iii) III $= \frac{I \times IV}{II}$

(iv) IV $= \frac{III \times II}{I}$

(v) $\frac{I+II}{II} = \frac{III+IV}{IV}$

(vi) $\frac{I-II}{II} = \frac{III-IV}{IV}$

(vii) $\frac{I+II}{I-II} = \frac{III+IV}{III-IV}$

How to find Ratio

(i) If x A = y B

A : B = y : x

↓ for A, ↓ for B

(ii) If x A = y B = z C

$\therefore$ A : B : C = $y\times z$: $x\times z$: $x\times y$

↓ For A, ↓ For B, ↓ For C

(iii) p A = q B = r C = s D

A : B : C : D

= $q\times r\times s$: $p\times r\times s$: $p\times q\times s$: $p\times q\times r$

↓ For A, ↓ For B, ↓ For C, ↓ For D

SOME EXAMPLES, TO FIND RATIO

Ist method

A : B = 4 : 5, B : C = 3 : 2, A : B : C = ?

A : B : C

4 : 5 → 5

3 ← 3 : 2

4 × 3 : 5 × 3 : 5 × 2

12 : 15 : 10

IInd method

A : B : C = ?

A : B : C

4 × 5 ×

3 2

12 : 15 : 10

(b) A : B = 4 : 5, B : C = 3 : 2, C : D = 1 : 2

A : B : C : D = ?

Ist method

A : B : C : D

④ ⑤ → 5 → 5

× × × ×

3 ← ③ → ② → 2

× × × ×

1 ← 1 ← ① ②

12 15 10 20

IInd method

a : b = 1 : 2

b : c = 3 : 4

c : d = 5 : 1

a : b : c : d = 15 : 30 : 40 : 8

- **If an amount R is the divide between A and B in the ratio of m : n then**

यदि एक राशि R को A और B के बीच m : n के अनुपात में विभाजित किया जाना है, तो

(i) Part of A = $\frac{m}{m+n}\times R$

(ii) Part of B = $\frac{n}{m+n}\times R$

(iii) Difference of part of A and B = $\frac{m-n}{m+n}\times R$

where m > n

- If the ratio of A and B is m : n and the difference in their share is 'R' units then,

यदि A और B का अनुपात m : n है और उनके हिस्से का अंतर 'R' इकाई है, तो,

(i) Part of A = $\frac{m}{m-n}\times R$

(ii) Part of B = $\frac{n}{m-n}\times R$

(iii) The sum of parts of A and B = $\frac{m+n}{m-n}\times R$

where m > n

CONCEPT OF DEGREE/डिग्री की अवधारणा

1. If $\frac{p}{q}=\frac{7}{3}$

then $\frac{5p+3q}{8p-7q}$

degree of p and q in numerator and denominator is same which is 1

दिये गए, प्रश्न में p और q की डिग्री अंश और हर में समान है, जो 1 है।

$\therefore \frac{5\times7+3\times3}{8\times7-7\times3}=\frac{44}{35}$

2. $\frac{3p^2+2q^2}{3p^2-pq}=\frac{3\times(7)^2+2(3)^2}{3\times(7)^2-(7)\times(3)}=\frac{3\times49+2\times9}{3\times49-21}=\frac{55}{42}$

3. $\frac{p^3+q^2}{p+q^4}$ in this question p has 3 degree and q has 2 degree in numerator, while p has 1 degree and q has 4 degree.

दिये गए प्रश्न में, p के पास 3 डिग्री है और q के पास 2 डिग्री है अंश में जबकि हर में p के पास एक और q के पास 4 डिग्री है।

$\therefore$ It can not be determined unless we have not the real value of p and q.

(नहीं हल किया जा सकता जब तक p और q का असली मान ना पता हो

AGE
आयु
CHAPTER 07

1. If the ratio of present age and the ratio of age after 'n' year is given then present age factor is given by:
यदि वर्तमान आयु का अनुपात तथा 'n' वर्ष के बाद आयु का अनुपात दिया गया हो, तो वर्तमान आयु का गुणज होगा।

$$x = \frac{\text{(Diff. in 2nd ratio)} \times \text{time}}{\text{Diff. in cross product of ratio}} \Big/ \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय}}{\text{अनुपात का क्रॉस गुणनफल का अंतर}}$$

2. If x is the present age factor, and the diff. in cross product of ratio is zero then.
यदि x वर्तमान आयु का गुणज है तथा अनुपात के क्रॉस गुणनफल का अंतर शून्य है तो,

$$x = \frac{\text{Time/समय}}{\text{Diff.of ratio/अनुपात का अंतर}}$$

3. If the ratio of "Some year ago" and 'after some year' is given and before 't_1' years the ratio of ages of A and B was a : b.
यदि "कुछ साल पहले" तथा "कुछ साल बाद" का अनुपात दिया गया है, तथा 't_1' वर्ष पहले, A तथा B की आयु की अनुपात a : b था।
A Present age/वर्तमान आयु $= ax + t_1$
B Present age/वर्तमान आयु $= bx + t_1$
after t_2 years, the ratio of their age will be c : d
t_2 वर्ष बाद, A तथा B की आयु का अनुपात C : D होगा।

$$\therefore x = \frac{\text{(Diff. in 2nd ratio)} \times (t_1+t_2)}{\text{Diff. in cross products of the ratio}}$$

$$x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times (t_1+t_2)}{\text{अनुपात का क्रॉस गुणनफल का अंतर}}$$

When, the difference. in ratio is equal, then
जब अनुपात का अंतर समान हो, तो

$$x = \frac{t_1+t_2}{\text{Diff.of ratio/अनुपात का अंतर}}$$

4. If the product of present age is given, then
यदि वर्तमान आयु का गुणनफल दिया हुआ है, तब

$$x = \sqrt{\frac{\text{Product of ages of two person/दो व्यक्तियो के आयु का गुणनफल}}{\text{Product of ratio/अनुपात का गुणनफल}}}$$

5. If sum of present age and ratio of the age is given then, present age factor.
यदि वर्तमान आयु का योगफल तथा आयु का अनुपात दिया हुआ है तो वर्तमान आयु का गुणज।

$$x = \frac{\text{Sum of present age/वर्तमान आयु का योग}}{\text{Sum of ratio/अनुपात का योग}}$$

6. If the ratio of ages and diff. in ages is given then
यदि आयु का अनुपात तथा आयु का अंतर दिया हुआ है, तब

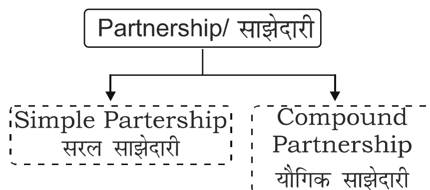
$$x = \frac{\text{Diff. between age/आयु का अंतर}}{\text{Diff. in ratio/अनुपात का अंतर}}$$

7. If ratio of age of A & B was x : y 'n' years ago.
n वर्ष पहले A और B के आयु का अनुपात x : y था
(i) If the present age ratio is a:b then/यदि वर्तमान आयु का अनुपात a:b हो तो $\frac{x+n}{y+n} = \frac{a}{b}$
(ii) If after 'm' years, then ratio of ages will be p : q then/यदि 'm' वर्ष के बाद, आयु का अनुपात p : q होगा, तो
$$\frac{x+n+m}{y+n+m} = \frac{p}{q}$$

8. If n year before, the ratio of ages of A, B and C was x : y : z, then the ratio of their present ages is
यदि 'n' वर्ष पहले, A, B और C की आयु का अनुपात x : y : z था तो उनकी वर्तमान आयु का अनुपात
$x + n : y + n : z + m$

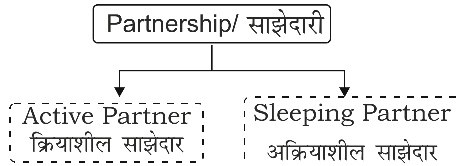
9. If after m years, the ratio of ages of A and B will be x : y. then the ratio of their present ages is.
यदि m वर्ष के बाद, A तथा B की आयु का अनुपात x : y होगा तो उनकी वर्तमान आयु का अनुपात होगा।
$x - m : y - m$

PARTNERSHIP
सझेदारी
CHAPTER 08



Simple Partnership/सरल साझेदारी:- If all partners invest different capital for same time period or same capital for different time period./यदि सभी साझेदार एक ही समय अवधि के लिए अलग–अलग पूँजी या अलग–अलग समय अवधि के लिए एक ही पूँजी का निवेश करते हैं।

Compound Partership/यौगिक साझेदारी:- If all partners invest their diffrent capitals for different time period./ यदि सभी साझेदारी अलग-अलग समय अवधि के लिए अपनी अलग-अलग पूँजी निवेश करते हैं।



Active Partner/क्रियाशील साझेदार:- Invests money as well as takes part in business activity for which he is paid salary from the profit.
पैसे का निवेश करता है और साथ ही साथ व्यापारिक कामों में भाग लेता है और जिसके लिए उसे लाभ से वेतन भुगतान किया जाता है।

Sleeping Partner/अक्रियाशील साझेदार:- Who only invest money and does not take part in business activities./ केवल धन का निवेश करता है व्यावसायिक गतिविधियों में भाग नहीं लेता है।

Profit = capital × time/ लाभ = पूँजी × समय

$$\text{पूँजी (Capital)} = \frac{\text{लाभ (Profit)}}{\text{समय (time)}}$$

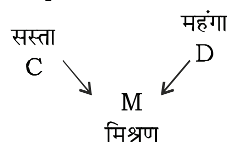
$$\text{समय (Time)} = \frac{\text{लाभ (Profit)}}{\text{पूँजी (Capital)}}$$

यदि समय का Mention, प्रश्न में न हो तो उसे पूरे 1 वर्ष मानना चाहिए। *(1 year = 12 months)*

A. Different Investment, same time period of investing/जब निवेश की धनराशि अलग-अलग हो तथा निवेश का समयान्तराल समान हो तो-

If the amount invested by the partners are I_1, I_2, I_3 then the profit is distributed in the ratio $I_1 : I_2 : I_3$.
यदि साझेदारों द्वारा निवेशित धनराशि I_1, I_2, I_3 हो तो उनके लाभ I_1, I_2, I_3 अनुपात में वितरित होगें।

B. Let there be three partners, one invests I_1 for t_1 time, second invests I_2 for t_2 time and third invests I_3 for t_3 time. The profit is shared in the ratio.
माना तीन साझेदार हैं पहला (I_3) धनराशि (t_1) समय, दूसरा (I_2) धनराशि (t_2) समय और तीसरा (I_3) धनराशि (t_3) समय है, तो लाभ अनुपात वितरित होगें।



C. Different amounts Invested in different time periods./जब अलग-अलग धनराशि अलग-अलग समय अवधि के लिए निवेशित किये जाये।

A : B
$(A \times T) : (B_1 \times t_1 + B_2 \times t_2)$
B invests twice, that too for different periods./B ने दो बार पैसा लगाया वो भी अलग-अलग समय के लिए।

MIXTURE AND ALLIGATION
मिश्रण एवं समिश्रण

CHAPTER 09

➢ ***Mixture/मिश्रण:-***
When two or more ingredients are mixed together to get a desired quantity.
जब वांछित मात्रा प्राप्त करने के लिए दो या दो से अधिक सामग्रियों को एक साथ मिलाया जाता है।

Article/वस्तु
- Price/कीमत
- Substance or part/ द्रव्य या भाग

based on price/कीमत के आधार पर

Price of article/वस्तु की कीमत
- Cheap/सस्ती
- Expensive/महंगी

Rule 1:– If the cost of a cheap item is Rs. C/kg and the cost of an expensive item is Rs. D/kg. If the price of the mixture of both the articles is Rs. M/kg./यदि सस्ते वस्तु की कीमत C रूपये/किग्रा है तथा मंहगे वस्तु की कीमत D रूपये/किग्रा है। दोनों वस्तुओं के मिश्रण की कीमत M रूपये/किग्रा है, तब

$$\frac{\text{Cheap article (सस्ती वस्तु)}}{\text{Expensive article (महंगी वस्तु)}} = \frac{D - M}{M - C}$$

सस्ता C ↘ महंगा D ↙
M
मिश्रण
↗ D-M ↖ M-C

∴ Ratio/अनुपात = D-M: M-C

Rule 2:– To find out to quantity of '*x*' in the mixture/ मिश्रण में '*x*' की मात्रा ज्ञात करने के लिए

$$= \frac{(\text{Ratio of } x) \times (\text{Total quanity of mixture})}{\text{sum of ratios}} /$$

$$\frac{(\text{x का अनुपात}) \times (\text{मिश्रण की कुल मात्रा})}{\text{अनुपात का योगफल}}$$

Rule 3:– If 'x' litres of liquid A containing 'p' litres is taken out and the same amount of liquid 'B' is added. Futher then 'q' litres of liquid is taken out of the mixture and the same amount of liquid 'B' is added. Then 'r' litre is taken out of the mixture and the same amount of liquid 'B' is added, then in the final state of the mixture, the amount of liquid 'A'/यदि 'x' लीटर वाले द्रव्य A में से 'p' लीटर निकाला जाता है तथा उतनी ही मात्रा में द्रव्य 'B' मिलाया जाता है आगे फिर मिश्रण में से 'q' लीटर द्रव्य निकाला जाता है तथा उतनी ही मात्रा में द्रव्य 'B' में मिलाया जाता है। फिर मिश्रण में से 'r' लीटर निकाला जाता है तथा उतनी ही मात्रा में द्रव्य 'B' मिलाया जाता है, तो मिश्रण की अंतिम अवस्था में, द्रव्य 'A' की मात्रा $x\left(\frac{x-p}{x}\right)\left(\frac{x-q}{x}\right)\left(\frac{x-r}{x}\right)....$

If the same process is repeated 'n' times, the final amount of liquid A in the volume of the mixture/ यदि यही प्रक्रिया 'n' बार दोहराई जाती है, तो मिश्रण के आयतन में द्रव A की अंतिम मात्रा= $x\left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

Where, P = replace quantity, n = time, x = initial quantity/ जहाँ, P = प्रतिस्थापित मात्रा, n = समय, x = प्रारंभिक मात्रा

Final amount of liquid B in mixture= x – (amount of liqued A in the final state of the mixture)/ मिश्रण की अंतिम अवस्था में द्रव्य B की मात्रा = x – (द्रव्य A की मात्रा मिश्रण की अंतिम अवस्था में)

Rule 5:– If the initial amount of substance is 'x'. and p amount is taken out of it and this process is repeated n times, then the ratio of the resultant mixture becomes a : b./यदि द्रव्य की प्रारंभिक मात्रा 'x' है उसमें से p मात्रा निकाली जाती है तथा यह प्रक्रिया n बार दोहराई जाती है तब परिणामी मिश्रण का अनुपात a:b हो जाता है। $\frac{a}{a+b}:\left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

Rule 6:– There are two vessels of equal volume. Both the vessels contain a mixture of milk and water in the ratio m : n and p : q respectively. If the mixture of both the vessels is mixed in a bigger vessel, then what will be the ratio of milk and water in the bigger vessel?

$\therefore$ *required ratio:–* $\left(\frac{m}{m+n}+\frac{p}{p+q}\right):\left(\frac{n}{m+n}+\frac{q}{p+q}\right)$

समान आयतन के दो बर्तन है। दोनों बर्तनों में दूध तथा पानी का मिश्रण क्रमश: m:n तथा p:q के अनुपात में है। यदि दोनों बर्तनों के मिश्रण को एक बड़े बर्तन में मिलाया जाए तो बड़े बर्तन में दूध और पानी का अनुपात

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $\left(\frac{m}{m+n}+\frac{p}{p+q}\right):\left(\frac{n}{m+n}+\frac{q}{p+q}\right)$

Rule 7:– Mixture of milk and water '*x*' units of liquid is in the ratio a:b. if 'd' units of milk are added to this mixture, then the ratio of milk and water becomes $a_1 : b_1$ '*x*' इकाई द्रव्य में दूध तथा पानी के मिश्रण का अनुपात a : b यदि 'd' इकाई दूध इस मिश्रण में मिला दिया जाए तो दूध तथा पानी का अनुपात $a_1 : b_1$ हो जाता है।

then $d = x\frac{(a_1 b - ab_1)}{(a+b)\,b_1}$ if 'd' unit of water is added, then d $= x\,\frac{x(ab-a_1b_1)}{(a+b)a_1}$ तब $d = x\frac{(a_1 b - ab_1)}{(a+b)\,b_1}$ इकाई यदि 'd' इकाई पानी मिलाया जाए तो, d = x $\frac{x(ab-a_1b_1)}{(a+b)a_1}$ इकाई

Rule 8:– The quantity of milk in 'a' unit mixture of milk and water is x%. what amount of milk should be added to this mixture so that the resulting mixture in milk increases from x% to y%/दूध तथा पानी के 'a' इकाई मिश्रण में दूध की मात्रा x% है। इस मिश्रण में दूध की कितनी मात्रा मिलाई जाए ताकि परिणामी मिश्रण में दूध की मात्रा x% से बढ़कर y% हो जाए।

$\therefore$ required quantity of milk/दूध की अभीष्ट मात्रा $\frac{a(y-x)}{100-y}$ unit/इकाई

Rule 9:– The amount of water in 'a' unit mixture of sugar and water is x%. what amount of water should be evaporated from this mixture so that the water content in the resulting mixture decreases from x% to y%

$\therefore$ required amount of water $\frac{a(x-y)}{y}$ units to be evaporated.

चीनी तथा पानी के 'a' इकाई मिश्रण में पानी की मात्रा x% है। इस मिश्रण से पानी की कितनी मात्रा वाष्पित की जाए ताकि परिणामी मिश्रण में पानी की मात्रा x% से घटकर y% हो जाए।

$\therefore$ अभीष्ट पानी $\frac{a(x-y)}{y}$ इकाई की मात्रा जिसे वाष्पित किया जाता है।

Alligation/सम्मिश्रण

Alligation is nothing but the method of average./सम्मिश्रण और कुछ नहीं बल्कि औसत की विधि है।

$m_1$kg $\qquad$ $m_2$kg

c_1Rs./kg $\qquad$ C_2Rs/kg

$m_1 + m_2 \rightarrow m_1c_1 + m_2c_2$

$1\text{kg} \rightarrow \frac{m_1c_1 + m_2c_2}{m_1 + m_2} = cm$

$m_1c_1 + m_2c_2 = cmm_1 + cmm_2$

$m_1(c_1 - cm) + m_2(c_2 - cm) = 0$

$m_1(c_1 - cm) = m_2(cm - c_2)$

$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{cm - c_2}{c_1 - cm}}$ if $c_2 < cm < c_1$

$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2 - cm}{cm - c_1}}$ if $c_1 < cm < c_2$

m_1 : m_2

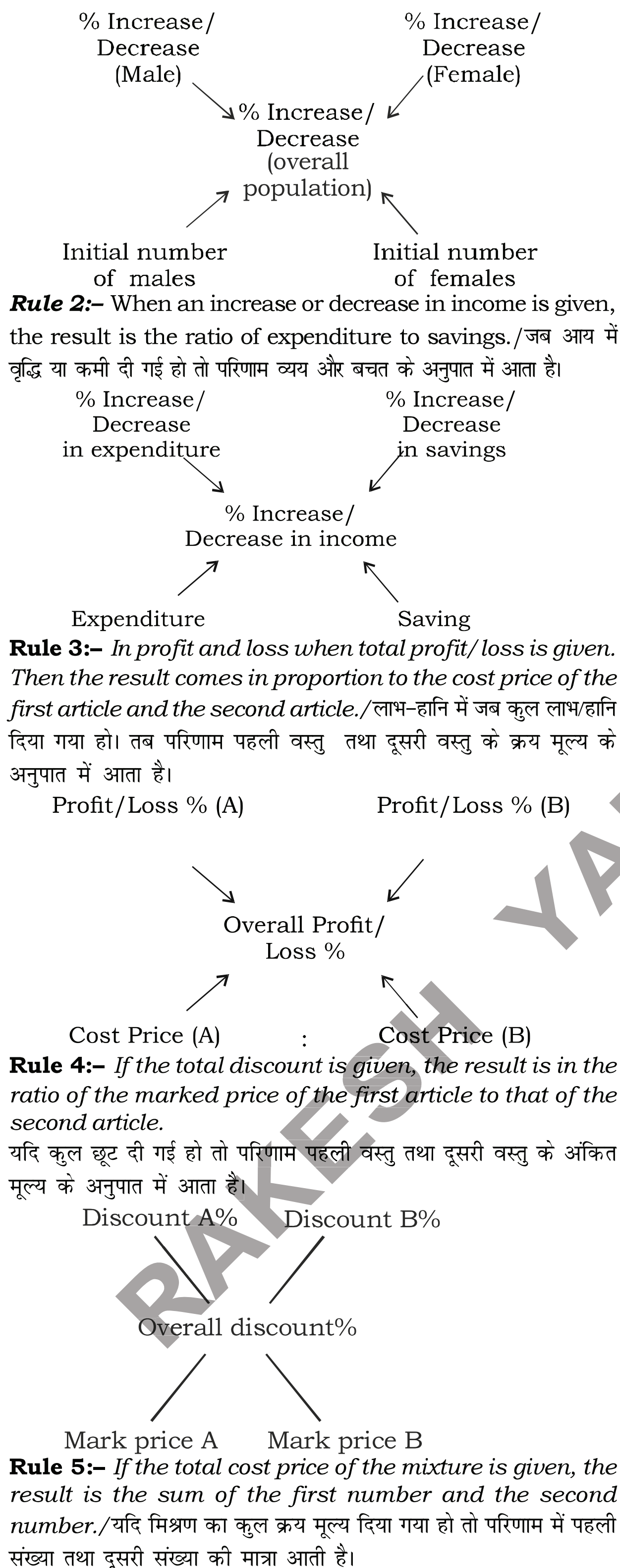
c_1 $\qquad$ c_2

cm

$(c_2 - cm)$: $(cm - c_1)$

(m_1) : (m_2)

Rule 1:– When the total increase in population is given. So the result comes in the ratio of the number of men and women./जब जनसंख्या में कुल वृद्धि दी गई हो। तो परिणाम पुरूषों एवं महिलाओं की संख्या के अनुपात में आता है।



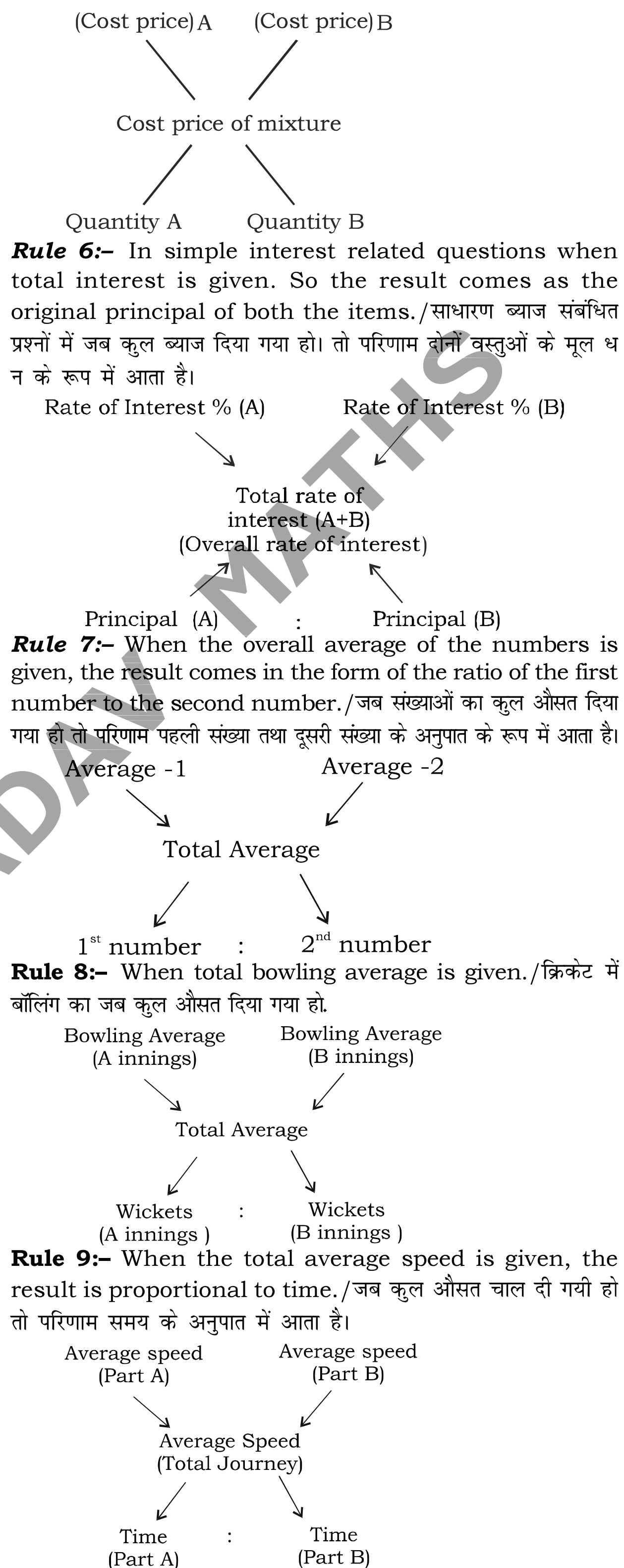
Rule 2:– When an increase or decrease in income is given, the result is the ratio of expenditure to savings./जब आय में वृद्धि या कमी दी गई हो तो परिणाम व्यय और बचत के अनुपात में आता है।

Rule 3:– *In profit and loss when total profit/ loss is given. Then the result comes in proportion to the cost price of the first article and the second article.*/लाभ-हानि में जब कुल लाभ/हानि दिया गया हो। तब परिणाम पहली वस्तु तथा दूसरी वस्तु के क्रय मूल्य के अनुपात में आता है।

Rule 4:– *If the total discount is given, the result is in the ratio of the marked price of the first article to that of the second article.*

यदि कुल छूट दी गई हो तो परिणाम पहली वस्तु तथा दूसरी वस्तु के अंकित मूल्य के अनुपात में आता है।

Rule 5:– *If the total cost price of the mixture is given, the result is the sum of the first number and the second number.*/यदि मिश्रण का कुल क्रय मूल्य दिया गया हो तो परिणाम में पहली संख्या तथा दूसरी संख्या की मात्रा आती है।



Rule 6:– In simple interest related questions when total interest is given. So the result comes as the original principal of both the items./साधारण ब्याज संबंधित प्रश्नों में जब कुल ब्याज दिया गया हो। तो परिणाम दोनों वस्तुओं के मूल धन के रूप में आता है।

Rule 7:– When the overall average of the numbers is given, the result comes in the form of the ratio of the first number to the second number./जब संख्याओं का कुल औसत दिया गया हो तो परिणाम पहली संख्या तथा दूसरी संख्या के अनुपात के रूप में आता है।

Rule 8:– When total bowling average is given./क्रिकेट में बॉलिंग का जब कुल औसत दिया गया हो.

Rule 9:– When the total average speed is given, the result is proportional to time./जब कुल औसत चाल दी गयी हो तो परिणाम समय के अनुपात में आता है।

TIME AND WORK
समय और कार्य

CHAPTER
10

Efficiency = Done work in a specific time.
कार्यक्षमता = एक निश्चित समय में किया गया कार्य।

➢ If A complete a piece of work in 'x' days, and B complete the same work in 'y' days./यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में पूरा करता है और B इसी कार्य को 'y' दिनों में पूरा करता है।

∴ Total time taken to complete the work by A and B both/ A और B दोनों द्वारा कार्य को पूरा करने में लिया गया समय

$$\Rightarrow \left(\frac{xy}{x+y}\right)$$

Total work = efficiency × no. of days/time.
कुल कार्य = कार्यक्षमता × समय

➢ If a can to a work in 'x' days. B can do the same work in 'y' days. C can do the some work in 'z' days then, total time taken by A, B and C to complete the work together.
यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है। B समान कार्य को 'y' दिनों में कर सकता है। C उसी कार्य को 'z' दिनों में कर सकता है, तो A, B और C द्वारा मिलकर कार्य को पूर्ण करने में लगा।

$$\text{कुल समय} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \left[\frac{xyz}{xy+yz+zx}\right] \text{ days}$$

➢ If A and B can do a work in 'x' days, B and C can do the same work in 'y' days and C and A can do the same work in 'z' days. Then total time taken, when A, B and C work together.
यदि A और B किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकते हैं B और C उसी कार्य को 'y' दिनों में कर सकते है C और A समान कार्य को 'z' दिनों में कर सकते है। तब A, B और C एक साथ उस कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे।

$$\text{कुल समय} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \Rightarrow \left(\frac{2xyz}{(xy+yz+zx)}\right) \text{दिन}$$

➢ If A working alone takes x days more than both A & B both and B working alone takes y days more than both A & B. Then the number of days taken by both A & B working together to finish a work.
यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B दोनों से x दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B दोनों से y दिन अधिक लेता है, तो A और B दोनों द्वारा एक साथ कार्य को पूरा करने में लगने वाले दिनों की संख्या

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A+B \longrightarrow t\,\text{days} \\ A \longrightarrow (t+x)\text{days} \\ B \longrightarrow (t+y) \end{pmatrix} \qquad t = \left(\sqrt{xy}\right) \text{ दिन है।}$$

➢ If M_1, men finish W_1 work in D_1 days working in T_1 time each days and M_2 men finish W_2 work in D_2 days, working in T_2 time each days then.
यदि M_1, पुरूष, W_1 कार्य को D_1 दिनों में पूरा करते है। प्रत्येक दिन T_1 समय में कार्य करते हैं और M_2 पुरूष W_2 कार्य को D_2 दिनों में समाप्त करते है। प्रत्येक दिन T_2 समय कार्य करते हैं तो

$$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

$$M_1D_1 = M_2D_2$$

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{W_2}$$

Where, E = effciency/क्षमता W = work/कार्य
M = man/आदमी H = hour/घंटे
T = Time/समय

➢ If x can finish $\frac{m}{n}$ part of the work in y day. Then, total time taken to finish the work by *x*/यदि x किसी कार्य का $\frac{m}{n}$ भाग y दिनों में पूरा कर सकता है, तो x द्वारा उसी समान कार्य को पूरा करने में लगा कुल समय = $\left(\frac{n}{m}\times y\right)$ days/दिन

➢ If A alone can do a certain work in 'x' days and A and B togeter can do the same work in 'y' days then B alone can do the same work in.
यदि A अकेला किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है और A और B मिलकर उसी कार्य को 'y' दिनों में कर सकते हैं तो B अकेला उसी कार्य को कितने दिनों में कर सकता है?

$$\left(\frac{x.y}{x-y}\right)\text{days}$$

➢ If food is available for 'x' days for 'A' men at a certain place and after 'y' days B men join, then the remaining food will serve total men for.
यदि एक निश्चित स्थान पर 'A' पुरूषों के लिए 'x' दिनों के लिए भोजन उपलब्ध है। और 'y' दिनों के बाद 'B' पुरूष शामिल होते हैं तो शेष भोजन कुल पुरूषों में कितने दिन चलेगा।

Required time (आवश्यक भोजन):- $\frac{A(x-y)}{A+B}$ **days.**

➢ If A men or B boys or C women can do a certain work in 'x' days then A_1 men, B_1 boys and C_1 women can do the same work in.

यदि A पुरूष या B लड़के या C महिलाएं किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकते हैं तो A_1 पुरूष, B_1 लड़के और C_1 महिला समान कार्य कितने दिनों में कर सकते है।

$$\textbf{time taken} = \frac{x}{\frac{A_1}{A} + \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C}} \textbf{ days}$$

➢ The camparision of rate of work done is called efficiency of doing work./किए गए कार्य की दर की तुलना कार्य करने की दक्षता कहलाती है।

Efficiency/दक्षता(E) $\alpha \frac{1}{\textbf{No. of days}}$

$$E_1 : E_2 : E_3 = \frac{1}{D_1} : \frac{1}{D_2} : \frac{1}{D_3}$$

$E = \frac{k}{D}$ or ED = k

or $(E_1D_1 = E_2D_2 = E_3D_3)$

Ex:- 3 person can complete the work in 4 days, 5 days, 6 days respectively. Find ratio of their efficiency?/3 व्यक्ति एक कार्य को क्रमश: 4 दिन, 5 दिन और 6 दिन में पूरा कर सकते है। उनकी दक्षता का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Person ⟶	A	B	C
Time ⟶	4 days	5 days	6days

Efficiency ⟶ $\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}\right) \times 60(\text{LCM})$

(A)	(B)	(C)
15	12	10

➢ If the efficiency to work of A is twice the efficiency to work of B then,
A : B (efficiency) = 2x : x and A : B (time) = t : 2t
यदि A की कार्यकुशलता B की कार्यकुशलता की दोगुनी हो, तो A : B (दक्षता) = 2x: x और A : B समय = t : 2t

➢ If A can do a work in 'x' days and B is R% more efficient than A then 'B' alone will do then same work in $\mathbf{x} \times \frac{\mathbf{100}}{(\mathbf{100+R})}$ days.

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है और B, A की तुलना में R% अधिक कुशल है तो 'B' अकेला उसी कार्य को $\mathbf{x} \times \frac{\mathbf{100}}{(\mathbf{100+R})}$ दिनों में करेगा।

Ex:- Ram can do a work in 15 days. Shri Ram is 20% more efficient than Ram. Then shri Ram alone do the some work in?/राम किसी कार्य को 15 दिनों में कर सकता है, श्री राम की तुलना में 20% अधिक कुशल है, तो श्री अकेले कितने दिनों में समान कार्य करेगी?

Shree (alone) will work = $15 \times \frac{100}{100+20}$

= 12.5 days

WORK AND WAGES

कार्य एवं मजदूरी

CHAPTER

11

- Relation in Efficiency, wages and time/कार्यक्षमता, वेतन, समय में संबंध:-

$$\left[\text{Efficiency(E)}\,\alpha\,\text{Wages(w)}\propto\frac{1}{\text{Time}}\right]$$

or

for same time wages $\propto$ efficiency

- If time is different $\rightarrow$ Wages $\propto$ work done

1. Capacity or efficiency = work done in unit time (कार्य क्षमता = इकाई समय में किया गया कार्य)

$$\frac{1}{\text{पूरे कार्य को करने में लिया गया समय}}$$

2. Time taken to finish the whole work/पूरे कार्य को करने में लिया गया समय $= \dfrac{1}{\text{Efficiency / कार्यक्षमता}}$

3. A can do a work in 'x' days and B can do the same work in 'y' days. If they work together and total wages is R, then

A किसी काम को 'x' दिनों में कर सकता है और B किसी काम को 'y' दिनों में कर सकता है। यदि वे एक साथ काम करते हैं और कुल वेतन R है, तो–

Part of A/(A का हिस्सा) = $\mathbf{\dfrac{x}{(x+y)}\times R}$

Part of B/(B का हिस्सा) = $\mathbf{\dfrac{y}{(x+y)}\times R}$

4. If A, B and C finish the work in x, y and Z days respectively and receive the total wages R, then the ratio of their wages is.

यदि A, B और C कार्य को x, y और z दिनों में पूरा करते हैं और उन्हें कुल मजदूरी R प्राप्त होती है, तो उनकी मजदूरी का अनुपात है–

$$\mathbf{\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}}$$

5. If workers finish any work doing it from starting to last then ratio of wages $\Rightarrow$ ratio of their efficiency./ यदि कर्मचारी शुरू से अंत तक किसी कार्य को खत्म करते हैं तब उनके वेतन का अनुपात $\Rightarrow$ उनके कार्यक्षमता का अनुपात

6. If many workers, doing partly work to finish a work then ratio of their wages = ratio of their work done./ यदि कई कर्मचारी किसी कार्य का आंशिक भाग खत्म करते हैं। तब उनके वतन का अनुपात = उनके काम का अनुपात

7. If x man and y boys do a work in (m) day while a man and 'b' boys do that work in (n) days. then,/ (x men + y boys) m = (a man = b boys)n

यदि x आदमी और y लड़के एक कार्य को m दिन में करते हैं जबकि a आदमी और b लड़के उसी कार्य को n दिनों में करते हैं। तब, ((x) आदमी +(y) लड़के) × m = ((a) आदमी + (b) लड़के) × n

8. When work way be finish alternatively.

जब काम अंतराल/एकान्तर/वैकल्पिक रूप से खत्म हो।

(a) When two men do the work alternative then one round will be of two days.

जब दो व्यक्ति कार्य को एकान्तर रूप से करते हैं तब एक (Round/चक्कर) **दो दिनों** में होगा।

(b) When three men do the work alternatively then one round will be of three days./जब तीन व्यक्ति कार्य को एकान्तर रूप से करते है तब एक (Round/चक्कर) तीन दिनों में होगा।

9. X and Y working alone can do a work in 'a' and 'b' days, respectively. They both work together in the begining and if x leaves the work before d days of completion, then time taken to complete **the whole work is./**यदि x और y एक कार्य को क्रमशः a और b दिनों में कर सकते हैं, वे दोनों साथ-साथ शुरू करते हैं यदि x काम खत्म होने के d दिन पहले काम छोड देता है, **तो पूरा काम कितने समय में समाप्त होगा।**

$$\mathbf{T\Rightarrow\frac{(a+d)\times b}{(a+b)}\,days}$$

Ex:-Ram and Shyam can do a piece of work in 10 and 12 days respectively, they both start together. If Ram leaves the work 2 days before the completion of the work then in what time the whole work will be finished/राम और श्याम एक कार्य को क्रमशः 10 और 12 दिनों में कर सकते है, वे दोनों साथ-साथ शुरू करते हैं यदि राम काम खत्म होने के 2 दिन पहले काम छोड़ देता है तो पूरा काम कितने समय में खत्म होगा–

Ram/राम = 10 days = a

Shyam/श्याम = 12 days = b

$$T\Rightarrow\frac{(a+d)b}{(a+b)}\Rightarrow\frac{(10+2)\times 12}{22}$$

d = 2 दिन पहले $\Rightarrow \dfrac{72}{11}\Rightarrow 6\dfrac{6}{11}$ days.

PIPE AND CISTERN
नल और टंकी

CHAPTER
12

Volume of water released or filled = (Rate × Time)

छोड़े गए या भरे गए पानी मी मात्रा = (दर × समय)

- Two taps 'P' and 'Q' can fill a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both time taps are opened together, then how much time it will take to fill the tank?
  दो नल 'P' और 'Q' एक टंकी को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ दिया जाए, तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा? आवश्यक समय = $\left(\frac{xy}{x+y}\right)$hr. , इसी प्रकार–↓
- Two taps 'A' and 'B' can empty a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then time taken to empty the tank will be required time/दो नल 'A' और 'B' एक टंकी को क्रमशः x घंटे, y घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को खाली करने में लगा समय = $\left(\frac{xy}{x+y}\right)$hr./घंटे
- P, Q, R.........all taps are opened together, then, the time required to fill/empty the tank will be:
  यदि P, Q, R........ सभी नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को भरने/खाली करने में लगने वाला समय होगा:
  $\frac{1}{P} \pm \frac{1}{Q} \pm \frac{1}{R} \pm .... = \frac{1}{T}$, (T = required time)

Note/नोट:- Positive result shows that the tank is filling and negative result shows that the is getting empty./ धनात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी भरी जा रही है और ऋणात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी खाली हो रही है।

- Tap 'P' can fill a tank in 'x' hours and 'Q' can empty the tank in 'y' hours. Then (a) time taken to fill the tank.
  एक नल 'P एक टंकी को 'x' घंटे में भर सकता है और Q टंकी को 'y' घंटे में खाली कर सकता है। तब (a) टैंक को भरने में लगने वाला समय
- When are opened (जब दोनों खोले जाते हैं।) $\left(\frac{xy}{x-y}\right)$: y > x

  Time taken to empty the tank./टंकी को खाली करने में लगा समय–

  When both are opened/जब दोनों खोले जाते हैं: $\left(\frac{xy}{y-x}\right)$: y > x
- If a pipe fill a tank in 'x' hours but it takes 't' more hours to fill it due to leakage in tank. If tank is filled completely then in how many hours it will be empty? (due to leakage outlet)
  यदि एक पाइप किसी टंकी को 'x' घंटे में भरता है। लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 't' घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी पूरी तरह भर जाए, तो वह कितने घंटे में खाली हो जाएगी। (रिसाव आउटलेट के कारण आवश्यक समय = $\frac{x(x+t)}{t}$

  Ex:- यदि एक पाइप किसी टंकी को 5 घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 1 घंटे अधिक लगता है। तो पूर्ण भरी टंकी रिसाव के कारण कितने घंटे में खाली हो जाएगी।

  आवश्यक (समय) = $\frac{5(5+1)}{1} \Rightarrow 5 \times 6 = 30$ hr.

  Where x = 5 hr.
  t = 1 hr.
- Two taps P and Q can fill a tank in x hours and y hours respectively. If both the pipes are opened together, then the time after which pipe Q should be closed so that the tank is full in (t) hours.
  दो नल P और Q एक टंकी को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोल दिया जाता है, तो पाइप x को कितने समय बाद बंद कर देना चाहिए ताकि टैंक (t) घंटे में भर जाए।

  Required time/आवश्यक समय = $\left[y\left(1-\frac{t}{x}\right)\text{hours}\right]$

TIME, SPEED AND DISTANCE & TRAIN
समय, चाल और दूरी तथा ट्रेन

CHAPTER
13

- *Time* = Time is a fundamental physical quantity which defines the sequence and duration of events and it is denoted by 'T'
  समय = समय एक मौलिक भौतिक मात्रा है जो घटनाओं के अनुक्रम और अवधि को परिभाषित करती है और इसे 'T' द्वारा निरूपित किया जाता है
- *Distance* = The length of space between two points is considered the distance and it is denoted by 'D'
  दूरी = दो बिंदुओं के बीच स्थान की लंबाई को दूरी माना जाता है और इसे 'D' द्वारा निरूपित किया जाता है
- *Speed* = Speed is defined as the distance travelled in unit time and it is denoted by 'S'

चाल = चाल को इकाई समय में तय की गई दूरी के रूप में परिभाषित किया गया है और इसे 'S' द्वारा निरूपित किया जाता है

Relation among Distance, Speed and Time
दूरी, चाल और समय के बीच संबंध

(a) Distance = Speed × Time
दूरी = गति × समय या $D = S \times T$

(b) Time/समय = $\frac{\text{distance}}{\text{speed}}$ or $T = \frac{D}{S}$

(c) Speed/चाल = $\frac{\text{distance}}{\text{time}}$ or $S = \frac{D}{T}$

➢ Conversion of speed/चाल का रूपांतरण

$1 \text{ km/hr} = \frac{5}{18} \text{ m/sec}$

$1 \text{ m/sec} = \frac{18}{5} \text{ km/hr}$

$1 \text{ km/hr.} = \frac{50}{3} \text{ metre/min.}$

$1 \text{ metre/min.} = \frac{3}{50} \text{ km/hr.}$

Important cases/महत्वपूर्ण स्थितियाँ

Case-I:- If 'D' is constant/यदि दूरी नियत हो

$S \propto \frac{1}{T}, T \propto \frac{1}{S}$

$D = S_1T_1 = S_2T_2$

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2}{T_1}$

Case-II:- If 'S' is constant/यदि चाल नियत हो

$D \propto T$

$D_1 = S \times T_1$

$D_2 = S \times T_2$

$\frac{D_1}{D_2} = \frac{T_1}{T_2}$

Case-III:- When 'T' is constant/यदि समय नियत हो

$D \propto S$

$D_1 = S_1T$

$D_2 = S_2T$

$\frac{D_1}{D_2} = \frac{S_1}{S_2}$

Relative Speed/सापेक्ष चाल :

Relative speed refers to the speed of one moving body in relation to another.

सापेक्ष चाल का संदर्भ एक गतिमान वस्तु का दूसरे गतिमान वस्तु की गति के संबंध से होता है।

➢ Relative speed in same direction/एक ही दिशा में सापेक्ष चाल = $S_1 - S_2$
(S_1 = Speed of train first, S_2 = Speed of train second)/(S_1 = पहले ट्रेन की चाल, S_2 = दूसरी ट्रेन की चाल) = $S_1 - S_2$

➢ Relative speed in opposite direction/विपरीत दिशा में सापेक्ष चाल = $S_1 + S_2$
Where/जहाँ $S_1 > S_2$

Train/रेलगाड़ी :

➢ *When train passes a pole or static object/ जब ट्रेन एक खंभे या स्थिर वस्तु से गुजरती है*
Where, Distance covered will be equal to the length of train/जहाँ, तय की गई दूरी ट्रेन की लंबाई के बराबर होगी

$T = \frac{L}{S}$ (Here, L – length, S = speed, T = Crossing time)

➢ *When train passes a bridge/platform/*जब ट्रेन एक पुल/प्लेटफार्म को पार करती है
Then, distance covered will be equal to the length of train and length of bridge/platform/तब, तय की गई दूरी ट्रेन की लंबाई और पुल/ प्लेटफॉर्म की लंबाई के बराबर होगी

$T = \frac{L_t + L_p}{S}$,

Here, $L_t \Rightarrow$ length of train, $L_p \Rightarrow$ length of plaform
$S \Rightarrow$ Speed, T = Crossing time
यहाँ, $L_t \Rightarrow$ ट्रेन की लंबाई, $L_p \Rightarrow$ प्लेटफॉर्म की लंबाई, $S \Rightarrow$ चाल, T = क्रॉसिंग समय

➢ *When train passes another train in opposite direction* distance covered will be $L_1 + L_2$
जब ट्रेन विपरीत दिशा में दूसरी ट्रेन को पार करती है तो तय की गई दूरी $L_1 + L_2$ होगी

$T = \frac{L_1 + L_2}{S_1 + S_2}$

Here/यहाँ, $L_1 \Rightarrow$ length of first train/पहली ट्रेन की लंबाई
$L_2 \Rightarrow$ length of second train/दूसरी ट्रेन की लंबाई
$S_1 \Rightarrow$ speed of first train/पहली ट्रेन की गति
$S_2 \Rightarrow$ speed of second train/दूसरी ट्रेन की गति

➢ *When a train passes another train in same direction, then/ जब एक ट्रेन समान दिशा में दूसरी ट्रेन को पार करती है, तब*

$T = \frac{L_1 + L_2}{S_1 - S_2}$

➢ *When a train passes a person sitting in another moving train/ जब एक ट्रेन दूसरी चलती ट्रेन में बैठे एक व्यक्ति को पार करती है*

$$T = \frac{L_1}{\text{Relative speed / सापेक्ष चाल}}$$

Relative speed in same direction = $S_2 - S_1$
समान दिशा में सापेक्ष गति = $S_2 - S_1$

S_1 = speed of first train, S_2 = speed of second train, L_1 = length of first train

S_1 = पहली ट्रेन की गति, S_2 = दूसरी ट्रेन की गति, L_1 = पहली ट्रेन की लंबाई

- *Length of train when it crosses a standing man in 'T_1' second time and 'L' metre long platform in 'T_2' Then,/*ट्रेन की लंबाई जब वह खड़े व्यक्ति को 'T_1' में तथा 'L' मीटर लम्बे प्लेटफार्म को 'T_2' समय में पार करती है तब,

length of the train/ट्रेन की लंबाई = $\frac{L \times T_1}{T_2 - T_1}$

- *Train of same length coming in same direction cross a man in t_1, and t_2 seconds/* समान दिशा में आने वाली समान लंबाई की ट्रेन एक आदमी को t_1 और t_2 सेकंड में पार करती है

Time taken to cross each other/एक-दूसरे को पार करने में लगने वाला समय = $\frac{2\times\text{product of time}}{\text{diff. of time}}$ / $\frac{2 \times \text{समय का गुणनफल}}{\text{समय का अन्तर}}$

- *Train of same length coming in opposite direction cross a man in t_1, and t_2 seconds/*
विपरीत दिशा में आने वाली समान लंबाई की ट्रेन एक आदमी को t_1 और t_2 सेकंड में पार करती है

Time taken to cross each other/एक-दूसरे को पार करने में लगने वाला समय

= $\frac{2\times\text{product of time}}{\text{sum of time}}$ / $\frac{2 \times \text{समय का गुणनफल}}{\text{समय का योग}}$

- *When train of length of 'l' passes a bridge/ plat form of 'x' metre in t_1 sec, then the time taken by same train to cross another bridge/platform of length of 'y' metre/ जब 'l' लंबाई वाली ट्रेन एक 'x' मीटर पुल/प्लेटफोर्म को t_1 सेकंड में पार करती है, तो उसी ट्रेन द्वारा 'y' मीटर की लंबाई वाले दूसरे पुल/प्लेटफार्म को पार करने में लिया गया समय*

Time/समय = $\left(\frac{l+y}{l+x}\right)t_1$

- *When two trains crosses each other the distance covered by one train is more than the second train, then/*जब दो ट्रेनें एक-दूसरे को पार करती हैं, और एक ट्रेन द्वारा तय की गई दूरी दूसरी ट्रेन से अधिक हो, तब = $\frac{(a+b)}{a-b} \times d$

Here/यहाँ,

a ⇒ speed of first train/पहली ट्रेन की गति

b ⇒ speed of second train/दूसरी ट्रेन की गति

d ⇒ distance/दूरी

- *If the average speed of a train without stoppage is 'U', and the average speed after adding the time after stoppage is 'V', then the stoppage time per hour is/ बिना रूके, किसी रेलगाड़ी की औसत गति 'U' है, तथा रूकने के बाद का समय जोड़कर औसत गति 'V' है, तो प्रति घंटा रूकने का समय*

= $\frac{\text{diff. between their average speed/औसत चाल में अंतर}}{\text{speed without stoppage/बिना रूके चाल}}$

= $\frac{U - V}{U}$ (U > V)

U ⇒ average speed of first train/पहली ट्रेन की औसत गति

V ⇒ average speed of second train/दूसरी ट्रेन की औसत गति

- *A train covers a distance between stations A and B in time 'T_1'. If the speed is changed by S then the time taken to cover the same distance is 'T_2' Then the distance 'D' between A and B is/ एक ट्रेन स्टेशन A और B के बीच की दूरी को 'T_1' समय में तय करती है। यदि गति S द्वारा बदल दी जाती है तो समान दूरी को तय करने में लगने वाला समय 'T_2' है, तब A और B के बीच की दूरी 'D'*

$$D = S\left(\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}\right) \text{ or } \left(\frac{S_1}{T_1}\right) T_1 T_2$$

where 'T' change in time taken

जहां 'T' समय में परिवर्तन है

Average Speed/औसत चाल :

- *Average speed : Average speed is the total distance travelled by the object in a particular time interval/ औसत गति: औसत गति एक इकाई समय अंतराल में वस्तु द्वारा तय की गई कुल दूरी है*

Average speed/औसत चाल = $\frac{\text{total distance/कुल दूरी}}{\text{total time/कुल समय}}$

Here, different distance is traveled in different time/जब, अलग-अलग समय में अलग-अलग दूरी तय की जाती है

Average speed/औसत चाल = $\frac{d_1 + d_2 + d_{3+......}}{t_1 + t_2 + t_{3+......}}$

- *When different distance are traveled with different speed/ जब अलग-अलग दूरी अलग-अलग गति से तय की जाती है*

Distance/दूरी = d_1, d_2, d_3 ......

Speed/चाल = s_1, s_2, s_3 ......

Average speed/औसत चाल = $\frac{d_1 + d_2 + d_3 + ...}{\frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} + \frac{d_3}{s_3} + ...}$

➢ *If a distance is divided into 'n' equal parts and each travelled with different speed, then/ यदि एक दूरी को 'n' बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, और प्रत्येक अलग-अलग गति से यात्रा करता है, तो*

Average speed/औसत चाल = $\dfrac{n}{\left(\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_2}+\dfrac{1}{s_3}+\dfrac{1}{s_4}\right)}$

Here, n = number of equal parts,/यहाँ, n = बराबर भागों की संख्या,

$S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ are speeds/$S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ चाल है।

➢ *If a bus travels from A and B with the speed of x km/hr and returns from B to A with the speed of y km/hr then average speed will be/ यदि एक बस A और B से x किमी/घंटा की गति से यात्रा करती है और B से A तक y किमी/घंटा की गति से लौटती है तो औसत गति?*

Average speed/औसत चाल = $\dfrac{2xy}{x+y}$

➢ *If a man covers $\frac{1}{x}$ part of journey at 'u' km/hr,/ यदि कोई व्यक्ति यात्रा का $\frac{1}{x}$ हिस्सा 'u' किमी/घंटा की गति से तय करता है,*

$\frac{1}{y}$ part at 'v' km/hr and $\frac{1}{z}$ part at 'w' km/hr and so on, then his average speed of for the whole journey/ $\frac{1}{y}$ भाग 'v' किमी/घंटा और $\frac{1}{z}$ भाग 'w' किमी/घंटा आदि पर तय करता है, तो पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत गति

Average speed/औसत चाल = $\dfrac{1}{\dfrac{1}{xu}+\dfrac{1}{yu}+\dfrac{1}{zw}}$

where, u,v,w denotes speed at which distance covered and x, y, z denotes parts of distance./जहां, u,v,w उस गति को दर्शाता है जिस पर दूरी तय की गई है और x, y, z दूरी के हिस्सों को दर्शाता है।

Some Importants Points

- A and B start walking at the same time from x and y towards y and x respectively. After meeting each other, A reaches point y after 'a' hours while B reaches point x after 'b' hours, then
  A और B एक ही समय में x और y से क्रमश: y और x की ओर चलना शुरू होते हैं। एक दूसरे से मिलने के बाद A,'a' घंटों के बाद बिंदु y पर पहुंचता है जबकि B, 'b' घंटों के बाद बिंदु x पर पहुँचता है, तो

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

b – speed of B
a – speed of A

If they meet after 't' hours then 't' = $\sqrt{t_1 \times t_2}$

यदि वे 't' घंटों के बाद मिलते हैं तो 't' = $\sqrt{t_1 \times t_2}$

t_1 = time taken by A/A द्वारा लिया गया समय
t_2 = time taken by B/B द्वारा लिया गया समय

- *Calculation of rounds/ चक्करों की संख्या की गणना—*
  When object travels around a circular object.
  Circular distance = circumference × no. of rounds/ जब वस्तु किसी वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर यात्रा करती हो ।
  वृत्ताकार दूरी = परिधि × चक्करो की संख्या

$$D = \mathbf{2\pi r \times n}$$

Where n = number of rounds
$2\pi r$ – circumference/
जहां n = चक्करों की संख्या $2\pi r$ – परिधि
$\left[\pi = \frac{22}{7} \text{ or } 3.14\right]$

r = radius of circle/जहां r = वृत्त की त्रिज्या

- *If a person overtakes or follows another person, then time taken to catch the person./*यदि कोई व्यक्ति किसी अन्य व्यक्ति से आगे निकल जाता है या उसका अनुसरण करता है, तो उस व्यक्ति को पकड़ने में लगा समय

$$= \frac{\text{distance between them}}{\text{relative speed}} \Big/ \frac{\text{दोनों के बीच में दूरी}}{\text{सापेक्ष चाल}}$$

Where relative speed/यहाँ सापेक्ष चाल = $S_1 - S_2$

- *Meeting time/ मिलने का समय:*

$$\frac{\text{speed of 1}^{\text{st}}\text{ traveller/पहले व्यक्ति की चाल}}{\text{difference of speed/दोनों के चाल में अंतर}} \times \text{time/समय}$$

- *Distance between the total poles*/कुल खंभों की बीच की दूरी :

Distance/दूरी = (n – 1) x

Where n = number of poles/जहाँ n = खम्भों की संख्या
x = distance between consecutive poles/दो क्रमागत खम्भों के बीच की दूरी

Important points related to increased and decrease of speed
गति में वृद्धि और कमी से संबंधित महत्वपूर्ण बिंदु

- If a person walks at $\frac{x}{y}$ of his normal speed to reach his destination 't' time earlier or later, then actual time taken to reach.
  यदि कोई व्यक्ति अपने गंतव्य पर 't' समय से पहले या बाद में पहुंचने के लिए अपनी सामान्य गति के $\frac{x}{y}$ से चलता है तथा अपने गंतव्य पर 't' पर पहले या बाद में पहुंचता है, तो गंतव्य पर पहुंचने में लगा वास्तविक समय

$= \frac{x}{\text{diff.between } x \text{ and } y} \times t$

Here, x and y are speed

यहाँ,x और y गति हैं

T = time/समय

y = normal speed/सामान्य गति

- If a person reaches his destination in 't_1' minute earlier when he walks at speed x and 't_2' minute later when he walks at speed y, then the distance to the destination

यदि कोई व्यक्ति अपने गंतव्य पर x गति से चलने पर 't_1' मिनट पहले और y गति से चलने पर 't_2' मिनट बाद पहुँचता है। तो गंतव्य की दूरी:-

$= \frac{x}{\text{diff.between } x \text{ and } y} \times \frac{t_1 + t_2}{60}$

Here, x and y are speed/यहाँ, x और y गति हैं

- If an object increases/decrease its speed from x km/hr to cover a distance in 't_2' hours in place of 't_1' hours then, (where $t_2 - t_1$) is given/यदि कोई वस्तु 't_1' घंटों के स्थान पर 't_2' घंटों में दूरी तय करने के लिए अपनी गति x किमी/घंटा से बढ़ती/घटती है, (जहां $t_2 - t_1$) दिया गया है तो

$D = \frac{xy}{\text{diff.between } x \text{ and } y} \times \text{change in time}$

Here, x and y are speed/यहाँ, x और y गति हैं

- Suppose a person takes 't' hours to travel x kilometer. If he walks some distance at a speed of 'u' km/hr and walks the remaining distance by bicycle at a speed of 'v' km/hr, then the time taken to walk.

माना कि एक व्यक्ति 'x' किलोमीटर जाने में 't' घंटे लेता है। यदि वह कुछ दूरी 'u' किमी/घंटा की चाल से पैदल चलता है तथा शेष दूरी को साइकिल से 'v' किमी/घंटा की चाल से चलता है तब पैदल चलने में लगा समय

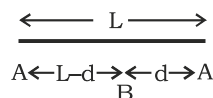
Time taken to walk/पैदल चलने में लगा समय $= \left(\frac{vt - x}{v - u}\right)$

Distance walked = time × v /पैदल चली गई दूरी = समय × v

CHAPTER 14
RACE
दौड़

- When A beats B by 'd' metres in a race of L metre.

जब A, L मीटर की दौड़ में B को 'd' मीटर से हरा देता है?



Where, Time is same/जहाँ समय समान हों

$D \propto S$

$\frac{D_A}{D_B} = \frac{S_A}{S_B} = \frac{L}{L - d}$

Hence/अत,

(d — distance by which A beats B.)/d — वह जिससे दूरी A, B को हराता है।

L — total distance/कुल दूरी

S_A — Speed of A/A की गति

S_B — Speed of B/B की गति

D_A — Distance of A/A की दूरी

D_B — Distance of B/B की दूरी

Example:-

In 500m race, A given a start of 50m to B and still beat him by 70m.

500 मीटर दौड़ में, A ने B को 50 मीटर की शुरुआत दी और फिर भी उसे 70 मीटर से हराया।

Sol. $\frac{D_A}{D_B} = \frac{500}{380} = \frac{50}{38}$

$\therefore \frac{S_A}{S_B} = \frac{50}{38}$

- If in a race of length L_1 the time taken by A and B be t_A and t_B ($t_B > t_A$), then the disatnce (d) by which A beats B given by

यदि लंबाई L_1 की दौड़ में A और B द्वारा लिया गया समय t_A और t_B ($t_B > t_A$) है, तो वह दूरी (d) जिससे A, B हराता है।

$d = \left(\frac{L}{t_B}\right)(t_B - t_A)$

or,

d = B's speed × ($t_B - t_A$)/d = B की गति × ($t_B - t_A$)

Where/जहाँ,

L – Length of race/दौड़ की लंबाई

t_A – time taken by A/A द्वारा लिया गया समय

t_B – time taken by B/B द्वारा लिया गया समय

Example:-

Vinay runs 100 metres in 20 seconds and Ajay runs the same distance is 25 seconds. By what distance will vinay beat Ajay in a hundred metre race

विनय 20 सेकंड में 100 मीटर दौड़ता है और अजय इतनी ही दूरी 25 सेकंड में दौड़ता है। 100 मीटर की दौड़ में विनय अजय को कितनी दूरी से हराएगा?

Sol. L = 100

t_A = 20 second

t_B = 25 seconds

$$d = \left(\frac{L}{t_B}\right)(t_B - t_A)$$

$$d = \frac{100}{25} \times 5 = 20m.$$

➢ If in a race of length L, A can given B a start of 'b' and 'c' a start of 'c' then the start that B can give C.

यदि लंबाई L की दौड़ में, A, B को 'b' की शुरुआत दे सकता है और C को 'c' की शुरुआत दे सकता है तो B, C को शुरुआत दे सकता है।

$$= \left(\frac{C-b}{L-b}\right) \times L$$

Example:-

In a race of 60m, A can given B a start of 15 and C a start of 20m. Then start that B can give to C.

60 मीटर की दौड़ में A, B को 15 मीटर और C को 20 मीटर की शुरुआत दे सकता है। फिर B, C को कितने मीटर शुरुआत दे सकता है।

Sol:- c — 20

b —15

L — 60

$$= \left(\frac{C-b}{L-b}\right) = 60\left(\frac{5}{45}\right) = \frac{20}{3}m$$

➢ If A gives B a start of distance 'd' and still beats him by time 't' in a race of length 'L'. Then B's speed is

यदि A, B को 'd' दूरी की शुरुआत देता है और फिर भी लंबाई 'L' की दौड़ में उसे 't' समय से हरा देता है। तो B की गति है

$$S_B = \frac{L-d}{\frac{L}{S_A}+t} = \frac{\text{Distance covered by B}}{\text{Total time taken by B}}$$

Where/कहाँ,

S_A — Speed of A/A की चाल

L — Length of race/दौड़ की दूरी

S_B — Speed of B/B की चाल

Example:-

A gives B start of 200m and still beats him by 5 sec in race of 1 km. Find the speed of B if speed of A is 10 m/sec.

A, B को 200 मीटर की शुरुआत देता है और फिर भी उसे 1 किमी की दौड़ में 5 सेकंड से हरा देता है। B की गति ज्ञात कीजिए यदि A की गति 10 मीटर/सेकंड है।

$$\text{Speed of B/B की चाल} = \frac{1000-200}{\frac{1000}{10}+5} = \frac{800}{105}$$

Speed of A/A की चाल = 10 m/sec.

Length of race/दौड़ की दूरी = L = 1000m

5. A and B run around a circle of circumference 'p' with speeds S_A and S_B respectively They start simultaneously from the same point, the time after which they will be together again for the first time.

A और B क्रमशः S_A और S_B की गति के साथ परिधि 'p' के एक वृत्त के चारों ओर चक्कर लगाते हैं, वे एक ही बिंदु से एक साथ शुरू करते हैं, वह समय जिसके बाद वे पहली बार फिर से एक साथ होंगे।

$$\frac{P}{S_A - S_B} = \frac{\text{Circumference}}{\text{Relative speed}}$$

Where P = Circumference/जहाँ P = परिधि

S_A = Speed of A/A की चाल

S_B = Speed of B/B की चाल

Example:-

A and B walk around a circle of circumference 132m with speed 18 m/sec and 7 m/sec respectively. If they start simultaneously from the same point, the time after which they will be together again for the first time?

A और B क्रमशः 18 मीटर/सेकंड और 7 मीटर/सेकंड की गति से 132 मीटर परिधि वाले एक वृत्त के चारों ओर चक्कर लगाते हैं। यदि वे एक साथ एक ही बिंदु से शुरू करते हैं, तो कितने समय बाद वे पहली बार फिर से एक साथ होंगे?

Sol:- $\frac{132}{18.7} = \frac{132}{11}$ = 12sec

P = 132

S_A = 18 m/sec

S_B = 7 m/sec.

BOAT & STREAM
नाव और धारा

CHAPTER **15**

1. Speed of boat in still water = x km/hr
स्थिर जल में नाव की गति = x किमी/घंटा
2. Speed of current/stream = y km/hr
धारा की गति = y किमी/घंटा
3. Speed of boat in the same direction of stream (downstream)/धारा की समान दिशा में नाव की गति (धारा के अनुकूल) D = $x + y$
4. Speed of boat in the opposite direction of stream (upstream)/धारा की विपरीत दिशा में नाव की गति (धारा के प्रतिकूल) U = $x - y$
5. Speed of boat/नाव की गति = $x > y$

$x = \frac{D+U}{2}$

Speed of stream/धारा की गति $\rightarrow$ $y = \frac{D-U}{2}$

6. Time taken to cover 'd_1' km downstream and 'd_2' km upstream with speed of boat x km/h and speed of stream y km/h.
नाव की गति x किमी/घंटा और धारा y किमी/घंटा की गति के साथ धारा के अनुकूल 'd_1' किमी और धारा के प्रतिकूल 'd_2' किमी को तय करने में लगने वाला समय

$\frac{d_1}{x+y} + \frac{d_2}{x-y} = t$

7. The average speed when a swimmer or boat covers a certain distance and return to the starting point.
औसत गति जब एक तैराक या नाव एक निश्चित दूरी तय करते है और पुनः शुरुआती बिंदु पर वापस आते है।
Speed of boat/नाव की गति = x
Speed of current/धारा की गति = y

$= \frac{(x+y)(x-y)}{x}$ km/hr

8. If a swimmer or a boat covers x km distance in 't_1' hours along the stream (downstream) and covers the same distance in 't_2' hours upstream, then
यदि एक तैराक या नाव धारा के साथ (धारा के अनुकूल)'t_1' घंटे में x किमी की दूरी तय करता है और धारा के प्रतिकूल 't_2' घंटे में समान दूरी तय करता है, तो

Speed of swimmer/boat/तैराक/नाव की गति = $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$

km/hr/किमी/घंटा

Speed of stream/धारा की गति = $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$

9. If a swimmer or boat takes equal time to travel 'd_1' km downstream and 'd_2' upstream, then
यदि एक तैराक या नाव धारा के अनुकूल 'd_1' किमी और धारा के प्रतिकूल 'd_2' किमी की यात्रा करने में समान समय लेता है, तो

$\frac{\text{speed of swimmer or boat/तैराक या नाव की चाल}}{\text{speed of stream/ धारा की चाल}}$

$= \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}$

10. If a boat travels equal distance (d) upstream as well downstream in 't' hours, then
यदि एक नाव समान दूरी (d) धारा के प्रतिकूल और धारा के अनुकूल 't' घंटे में तय करती है, तो

$\frac{d}{x+y} + \frac{d}{x-y} = t$

when 'd' is fixed distance/जब 'd' निश्चित दूरी है

$d = t\frac{(x^2 - y^2)}{2x}$

11. If a boat travels in downstream and upstream then,
यदि एक नाव धारा के अनुकूल और धारा के प्रतिकूल चलती है, तो,

Speed of boat = $\frac{\text{Sum of distance}}{2\times\text{time}}$

नाव की चाल = $\frac{\text{दूरी का योग}}{2 \times \text{समय}}$

Speed of stream = $\frac{\text{Diff. of distance}}{2\times\text{time}}$

धारा की चाल = $\frac{\text{दूरी का अन्तर}}{2 \times \text{समय}}$

12. Swimmer or boat covers a distance in the down-stream in 't_1' in hours. while the same distance is covered upstream in 't_2' hours, then
एक तैराक या नाव धारा की दिशा में 't_1' घंटे में कोई दूरी तय करते है। जबकि धारा के विपरीत दिशा मे वही दूरी 't_2' घंटे में तय करते है, तो

$\frac{\text{तैराक/नाव की चाल}}{\text{धारा की चाल}} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}$

AVERAGE
औसत

CHAPTER
16

"AVERAGE IS NOTHING BUT ARITHEMETIC MEAN"

1. Average = $\frac{\text{Sum of all observations}}{\text{Total number of all observation}}$

औसत = $\frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

2. Sum of all observations = Average × total number of observations.

प्रेक्षणों का योग = औसत × प्रेक्षणों की संख्या

3. Total number of all observations

$= \frac{\text{Average}}{\text{Sum of observation}}$

प्रेक्षणों की संख्या = $\frac{\text{औसत}}{\text{प्रेक्षणों का योग}}$

4. If observations are x_1, x_2, x_3, --------x_n and then,

Average = $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + - - - - - - + x_n}{n}$

यदि प्रेक्षण x_1, x_2, x_3, --------x_n हैं तब

औसत = $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + - - - - - - + x_n}{n}$

5. If observations are x_1, x_2, x_3, --------x_n and their frequency are f_1, f_2, f_3, -----f_n then,

Average = $\frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + - - - - + f_nx_n}{x_1 + x_2 + x_3 + - - - - - - - + x_n}$

यदि प्रेक्षण x_1, x_2, x_3, --------x_n हैं तथा उनकी बारंबारताऐ क्रमशः f_1, f_2, f_3, -----f_n हैं तब

औसत = $\frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + - - - - + f_nx_n}{x_1 + x_2 + x_3 + - - - - - - - + x_n}$

6. If the average of 'm' numbers is 'x' and the average of 'n' numbers is 'y' then, Average of total numbers

यदि m संख्याओं का औसत x हैं तथा n संख्याओं का औसत y है, तब

औसत = $\frac{mx + ny}{m + n}$

7. Average of 'n' consecutive natural numbers.

$= \frac{\text{first number} + \text{last number}}{2}$

8. Sum of first 'n' even numbers = n(n + 1)

पहली 'n' सम संख्याओं का योग = n(n + 1)

Average of first 'n' even numbers = (n + 1)

पहली n सम संख्याओं का औसत = (n + 1)

9. Sum of first 'n' odd numbers = n^2

पहली 'n' विषम संख्याओं का योग = n^2

Average of first 'n' odd numbers = n

पहली 'n' विषम संख्याओं का औसत = n

10. Sum of first 'n' natural numbers, i.e,/पहली 'n' प्राकृतिक संख्याओं का योग

1 + 2 + 3 + 4 + ------n = $\frac{n(n+1)}{2}$

Average of first 'n' natural numbers/पहली 'n' प्राकृतिक संख्याओं का औसत = $\frac{n+1}{2}$

11. Sum of square of first 'n' natural numbers, i.e,/पहली 'n' प्राकृतिक संख्याओं के वर्गो का योग

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ----- + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Average of square of first 'n' natural number/पहली 'n' प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

12. Sum of square of first 'n' even natural numbers, i.e,/ पहली 'n' प्राकृतिक सम संख्याओं का वर्गो का योग

Average/औसत $2^2 + 4^2 + 6^2 + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

13. Sum of square of first 'n' odd natural number, i.e,/ पहली 'n' प्राकृतिक विषम संख्याओं का वर्गो का योग

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ------- + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

Average/औसत = $\frac{(2n+1)(2n-1)}{3}$

14. Sum of cube of first 'n' natural number, i.e,/पहली 'n' प्राकृतिक संख्याओं का घनों का योग

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ----- + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Average/औसत $= \frac{n(n+1)^2}{4}$

15. Sum of cube of first 'n' even natural number, i.e,/ पहली 'n' प्राकृतिक सम संख्याओं का घनों का योग

$2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + ----- + (2n)^3 = 2[n(n + 1)]^2$

Average/औसत $= 2n(n + 1)^2$

16. Sum of cube of first 'n' odd natural number, i.e,/ पहली 'n' प्राकृतिक विषम संख्याओं का घनों का योग

$1^3 + 3^3 + 5^3 + ---- + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

Average/औसत $= n(2n^2 - 1)$

17. If the speed of A, from P to Q is x km/hr and speed of A from Q to P is y km/hr, then, where, PQ = QP

यदि A की चाल P से Q तक X km/hr तथा Q से P तक y km/hr हैं। जहां PQ = QP तब

Average speed of A/A की औसत चाल $= \frac{2xy}{x+y}$

18. If the speed of A, from P to Q is x km/hr, from Q to R is y km/hr, from R to S is Z km/hr then, where PQ = QR = RS,

यदि A की चाल P से Q तक X km/hr तथा Q से R तक y km/hr तथा R से S तक Z km/hr है जहां PQ = QR = RS तब

Average speed of A/A की औसत चाल $= \frac{3xyz}{xy+yz+zx}$

OR

If a person A covers three equal distance at the speed of x km/hr, y km/hr and z km/hr respectively then,

यदि एक व्यक्ति A तीन समान दूरियां क्रमशः x km/hr, y km/hr तथा z km/hr है तब

Average speed of A/A की औसत चाल $= \frac{3xyz}{xy+yz+zx}$

19. If a person A, covers distance P with speed of x km/hr distance Q with speed of y km/hr, and distance R with speed of z km/hr and so on --- then

यदि एक व्यक्ति A, P दूरी x km/hr की चाल से, Q की दूरी y km/hr की चाल से, R दूरी z km/hr की चाल से और इसी प्रकार आगे भी तय करता है तब

Average speed of A/A की औसत चाल $= \frac{P+Q+R+----}{\frac{P}{x}+\frac{Q}{y}+\frac{R}{z}+----}$

20. If a person A, covers P part of total distance with speed of x km/hr, Q part of total distance, with speed of y km/hr, and R part of total distance, with speed of z km/hr and so on --- then

यदि एक व्यक्ति A निश्चित दूरी का P भाग x km/hr की चाल से, Q भाग y km/hr की चाल से तथा R भाग z km/hr की चाल से और इसी प्रकार आगे भी तय करता है तब

Average speed of A/A की औसत चाल $= \frac{1}{\frac{P}{x}+\frac{Q}{y}+\frac{R}{z}+----}$

21. If there are three natural numbers and average of any two number when added with third number gives x, y, z. Then natural numbers.

यदि तीन प्राकृतिक संख्याएं हो और किसी दो संख्याओं के औसत को यदि तीसरी संख्या में जोड़ा जाए तो प्राप्त संख्याएं क्रमशः x, y और z होते तो

Sum of number (संख्या का योग)$=\left(\frac{x+y+z}{2}\right) = k$

Firs number (पहला योग) = 2x – k

Second number (दूसरा नंबर) = 2y – k

Third number (तीसरा नंबर) = 2z – k

22. If the average of 'A' numbers is 'x' and out of these 'm' numbers the average on 'B' numbers is 'y' (or vice versa) then the average of remaining number will be यदि 'A' संख्याओं का औसत x है और इन 'A' संख्याओं में से 'B' संख्याओं का औसत y है। (या इसके विपरीत) तो शेष संख्याओं का औसत क्या है?

(i) Average of remaining number (शेष संख्याओं का औसत) $= \frac{Ax - By}{A - B}$ [if A > B]

(ii) Average of remaining number (शेष संख्याओं का औसत) $= \frac{Bx - Ay}{B - A}$ [if B > A]

23. If from (n + 1) numbers, the average of first n number is 'F' and the average of last n numbers is 'L', and the first number is 'f and the last number 'l' then

(n + 1) संख्याओं से प्रथम n संख्याओं का औसत 'F' और अंतिम अवलोकन का औसत 'F' है और अंतिम n संख्याओं का औसत 'L' तथा पहली संख्या 'f' और अंतिम संख्या 'l' हो तो $f - l = n(F - L)$

24. If the average of 'n' observations is 'x' and from these the average of 1st 'm' observation is 'y' and the average of last 'm' observations is 'z' then

यदि 'n' अवलोकनों का औसत 'x' है और इनमें से पहले 'm' अवलोकन का औसत 'y' है और अंतिम 'm' अवलोकनों का औसत 'z' है तो

m^{th} observations = (y + z) – nx

$(m + 1)^{th}$ observations = nx – m(y + z)

25. If average of n numbers is m but later on it was found that a number 'x' was misread as 'y'.The correct average will be

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि एक संख्या 'x' को लगती से 'y' पढ़ लिया गया था। सही औसत होगा

$= m + \frac{(x-y)}{n}$

26. It the average of n numbers in m but later on it was found that two numbers 'x' and 'y' misread as 'p' and 'q'.

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि दो संख्या 'x' और 'y' को गलती से p और q पढ़ लिया लिया गया।

The correct average (सही औसत) $= m + \frac{(x+y-p-q)}{n}$

27. If in any series having common difference 'd' and Average 'k', 'x' numbers are added in forward or backward, then

यदि किसी श्रेणी जिसका सार्वन्तर d तथा औसत k हो और इसमें आगे से अथवा पीछे से x संख्याए जोड़े तो

New Average/नया औसत $= k \pm \frac{xd}{2}$

Case I:- d = 2 [for even or odd series/सम या विषम संख्याओं के श्रेणी के लिए]

then, New average/तब, नया औसत $= k \pm x$

Case II:- d = 1 [for consecutive natural number series/क्रमागत प्राकृतिक संख्या की श्रेणी के लिए]

then, New Average/तब, नया औसत $= k \pm \frac{x}{2}$

28. If average of 'n' observations is 'x' but the average becomes 'y' when one observation is eliminated, then value of eliminated observation = n(x – y) + y

यदि n प्रेक्षणों का औसत 'x' हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को विस्थापित कर दिया जाए तो औसत 'y' हो जाता है। विस्थापित प्रेक्षणों का मान = n(x – y) + y

29. If average of 'n' observations is 'x' but the average becomes 'y' when new observation is added, then value of added observation = n(y – x) + y

यदि n प्रेक्षणों का औसत 'x' हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को शामिल कर दिया जाए तो औसत 'y' हो जाता है। शामिल प्रेक्षणों का मान = n(y – x) + y

30. We have n observations out of which some observations (x_1, x_2, x_3.....) are replaced by some other new observations and in this way, if the average increase or decreases by 'y', then value of new observations = $a \pm nb$

यदि हमारे पास n प्रेक्षणों हो जिसमें से कुछ प्रेक्षणों (x_1, x_2, x_3.....) को कुछ नए प्रेक्षणों द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाए तथा इस प्रक्रिया में यदि औसत 'y' की वृद्धि अथवा कमी हो जाए तो नए प्रेक्षणों का मान $a \pm nb$

31. If the average of n students in a class is 'a', where average of passed students is 'x' and average of failed students is 'y', then

यदि किसी कक्षा में n विद्यार्थियों का औसत a हो, जहां उत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत x और अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत y हो तो

Number of students passed (उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या) =

$\frac{n(a-y)}{(x-y)}$

32. Bowling Average/गेंदबाजी औसत

$= \frac{\text{Total runs given}}{\text{Total wickets taken}}$

33. Batting Average/बल्लेबाजी औसत

$= \frac{\text{Total runs scored}}{\text{Total number of innings played}}$

34. 't' years before, the average age of N members of a family was 'T' years. If during this period 'n' children increased in the family but average age (present) remains same, then.

Present age of n children = n. T – N. t

t वर्ष पहले, एक परिवार के N सदस्यों की औसत आयु T वर्ष थी यदि इस अवधि में परिवार में n बच्चे बढ़े परन्तु औसत आयु (वर्तमान वही रहे तो)

n बच्चों की वर्तमान आयु = n. T – N. t

35. If in the group of N persons, a new person comes at the place of a person of 'T' years, so that average age, increase by 't' years

यदि N व्यक्तियों के समूह में, T वर्ष के व्यक्ति के स्थान पर एक नया व्यक्ति आता है, तो औसत आयु, t वर्ष से बढ़ जाती है।

Then, the age of the new person = T + N.t

फिर नए व्यक्ति की आयु = T + N.t

If the average age decrease by 't' years after entry of new person, then the age of the new person = T – N.t

यदि नए व्यक्ति के प्रवेश के बाद औसत आयु t वर्ष कम हो जाती है, तो नए व्यक्ति की आयु = T – N.t

36. The average age of a group of N students is 'T' years. If 'n' students join, the average age of the group increases by 't' years, then Average age of new students/N छात्रों के एक समूह की औसत आयु 'T' वर्ष है। यदि 'n' छात्र शामिल हाते है, तो समूह की औसत आयु 't' वर्ष बढ़ जाती है, तो नए छात्रों की औसत आयु $= T + \left(\frac{N}{n} + 1\right)t$

If the average age of the group decreases by 't' years, then Average age of new students/यदि समूह की औसत t वर्ष कम हो जाती है, तो (नए छात्रों की औसत आयु)

$= T+\left(\frac{N}{n}-1\right)t$

37. If the average age (height) of 'n' persons is x year (cms) and from them 'm' persons went out whose average age (height) is 'y' years (cms) and same number of persons joined whose average age (height) is 'z' years (cms) then what is the average age (height) of n persons?

यदि 'n' व्यक्तियों की औसत आयु (ऊंचाई) 'x' वर्ष (cms) है और उनमें से 'm' व्यक्ति निकले जिनके औसत आयु (ऊंचाई) 'y' वर्ष (cms) है और उतने ही व्यक्ति शामिल हुए जिनकी औसत आयु (ऊंचाई) क्या है?

$\therefore$ Average age/औसत आयु= $\left\{x-\frac{m(y-x)}{n}\right\}$ years (cms)

38. If in a group, one member is replaced by a new members, then.

Age of new member = (age of replaced member) $\pm$ xn

Where, x = increase (+) or decrease (–) in average

n = Number of members.

यदि किसी समूह में एक सदस्य को नए सदस्य से बदल दिया जाता है, तो–

नए सदस्य की आयु = (प्रतिस्थापित सदस्य की आयु) $\pm$ xn

जहां, x = औसत आयु वृद्धि (+) या कमी (–1)

n = सदस्यों की संख्या।

39. If a new member is added in a group then.

age (or income) of added member = Average age (or income) $\pm$ x(n + 1).

Where x = increase (+) or decrease (–) in average age (or income)

n = Number of members.

अगर किसी ग्रुप में कोई नया जोड़ा जाता है तो।

जोड़े नए सदस्य की आयु (या आय) = औसत आयु (या आय) $\pm$ x(n + 1)

जहां x = औसत आयु (या आय) में वृद्धि (+) या कमी (–)n सदस्यों की संख्या

40. If a member leaves the group, then income (or age) of left member = Average income (or age) $\pm$x(n – 1)

where, x = increase (+) or decrease (–) in average income (or age)

n = Number of members.

यदि कोई सदस्य समूह छोड़ देता है, तो नए सदस्य की आय (या आयु) = औसत आय (या आयु) $\pm$x(n – 1)

जहाँ, x = औसत (या आयु) में वृद्धि (+) या कमी (–)

n = सदस्य की संख्या।

"Mathematical operation performed on each observation results in same effect on the average."

LCM AND HCF
महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्तक

CHAPTER 17

➢ *LCM (Least Common Multiple)* (लघुत्तम समापवर्तक):-

The least common Multiple (LCM) is defined as the smallest multiple that two or more number have in common.

लघुत्तम समापवतर्त्य (LCM) को दो या दो से अधिक संख्याओं में उभयनिष्ठ गुणज के रूप में परिभाषित किया जाता है।

Some keywords used for LCM in question.
Lowest Common Multiple, Minimum, Smallest

➢ *Methods of finding LCM*/लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ :-

1. Prime Factorization Method/गुणनखंडन विधि:-

First express the given numbers in the form of prime factors. The product of factors with highest power will be the LCM.

पहले दी गई संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडो के रूप में व्यक्त कीजिए। उच्चतम घात वाले गुणनखण्ड का गुणनफल LCM होगा।

Example:

1. Find the LCM of 12, 48, 72 and 120?

Sol: $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

$\therefore$ LCM = Product of numbers with highest power of 2, 3 and 5 = $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$.

2. *Division Method*/विभाजन विधि:

In this method, divide the given numbers by common prime number until the remainder is a prime number or 1.

इस विधि में, दी गई संख्याओं को उभयनिष्ठ अभाज्य संख्या से तब तक विभाजित करें जब तक कि शेषफल एक अभाज्य संख्या या 1 न हो जाए।

Example:

1. Find the LCM of 16, 32 and 48?

Sol:

2	16, 32, 48
2	8, 16, 24
2	4, 8, 12
2	2, 4, 6
	1, 2, 3

LCM = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 = 96

➢ *LCM of Fractions*/भिन्न का लघुत्तम समापवर्तक:-

$$\text{LCM of fraction} = \frac{\text{LCM of Numerator}}{\text{HCF of Denominator}}$$

Example:

If fraction $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ is given, then

$$\text{LCM}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) = \frac{\text{LCM}(a,c,e)}{\text{HCF}(b,d,f)}$$

➢ *LCM of Indicies*/घातांको का लघुत्तम समापवर्तक:-

(i) When the base of the given numbers are same, then the number with highest power will be the LCM of the given numbers.
जब दी गई संख्याओं का आधार समान हो, तो उच्चतम घात वाली संख्या दी गई संख्याओं का लघुत्तम समापवर्तक होगी।

Example:-

Find the LCM of 6^1, 6^2, 6^4, 6^{10} and 6^{18}.

Sol. Here 6 is the same base and the highest power is of 6^{18}.
$\therefore$ LCM = 6^{18}.

(ii) When the base is not same and there is no common factors in the base, then the product of given numbers will be the LCM.
जब आधार समान न हो और आधार में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, तो दी गई संख्याओं का गुणनफल लघुत्तम समापवर्तक होगा।

Example:- LCM of 5^3 and 2^3 = $5^3 \times 2^3$ = 1000

NOTE:-

i) Find the smallest no. which is exacty divisible by x, y, z./वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णत: विभक्त हो। *LCM of (x, y, z)*

ii) Find the smallest number which when divided by x, y, z leaves remainder 'r' in each case./वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए। जो x, y, z से पूर्णत: भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष 'r' प्राप्त हो। *LCM (x, y, z) + r*

iii) Find the smallest number. Which when divided by x, y, z LCM (x, y, z) – k where,
leaves remainder a, b, c respectively./ वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णत: भाग देने पर शेषफल क्रमश: a, b, c प्राप्त हो। *k = (x – a) = (y – b)= (z – c)*

➢ *HCF (Highest common factor)/* (महत्तम समापवर्तक):

HCF of two or more numbers is that greatest number which completely divides each of the given number.
दो या दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह बड़ी से बड़ी संख्या होती है जो दी गई प्रत्येक संख्या को पूर्णत: विभाजित कर दें।

- *Some Keywords used for HCF in questions :*

— Greatest common factor
— Maximum
— Largest

Method of HCF/महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की विधि

(i) *Prime Factorization method/*गुणनखंडन विधि:

First, write each given numbers in the form of product of their prime factors. The product of common factors with least power will be the HCF of given numbers.
पहले, प्रत्येक दी गई संख्या को उनके अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखिए। कम से कम पॉवर वाले सामान्य गुणज का गुणनफल दी गई संख्याओं का महत्तम समावर्तक होगा।

Example:-

Find the HCF of 48, 36 and 72?

Sol.

48 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3= $2^4 \times 3$
36 = 2 × 2 × 3 × 3 = $2^2 \times 3^2$
72 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 = $2^3 \times 3^2$
Common factor = 2, 3
Common factor with least power = $2^2 \times 3^1$
$\therefore$ HCF = 12

ii) *Division Method/* विभाजन विधि:-

Suppose HCF of two number x and y have to be calculated. Where y > x. Greatest number is divided by smallest number.

Suppose that on dividing y by x remainder is S_1. Then on dividing x by S_1 the remainder is S_2. Then S_1 is divided by S_2. This process will be repeated until the remainder becomes zero. Last divisior will be the HCF of x and y.

मान लीजिए दो संख्याओं x और y का महात्तम समापवर्तक निकालना है। जहाँ y > x सबसे पहले बड़ी संख्या को सबसे छोटी संख्या से विभाजित किया जाता है।

मान लिजिए कि y को x से भाग देने पर शेषफल S_1 रह जाता है। फिर x को S_1 से भाग देने पर शेषफल S_2 होता है। फिर S_1 को S_2 से विभाजित किया जाता है। यह प्रक्रिया तब तक दोहराई जाएगी जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए। अंतिम भाजक x और y का महत्तम समापवर्तक होगा।

Example:-

Find the HCF of 48, 36 and 72.

Sol.

```
36) 48 (1
    36
    12) 36 (3
        36
        ××
```

$\therefore$ HCF of 36 and 48 = 12

Again,

```
12) 72 (6
    72
    ××
```

$\therefore$ HCF of 48, 36 and 72 is 12.

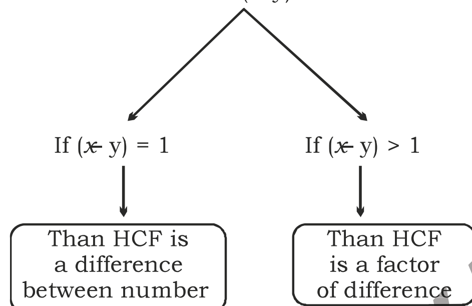
(iii) *Difference Method/अंतर विधि:–*

HCF of two numebrs = H

So, numbers = Hx, Hy; where x, y $\rightarrow$ co prime

Difference number = $Hx - Hy$

=H (x–y)



Note: HCF of 2 numbers can not be greater than their difference.

➢ *HCF of Fraction/भिन्न का महत्तम समापवर्तक*

$$\text{HCF of Fraction} = \frac{\text{HCF of Numerator}}{\text{LCM of Denominator}}$$

Ex:- If fraction $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ is given, then

$$\text{HCF}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) = \frac{\text{HCF}(a, c, e)}{\text{LCM}(b, d, f)}$$

➢ *HCF of Indicies/*घातांकों का महत्तम समापवर्तक:

1. When the base of the given number are same, then the number with least power will be the HCF of given numbers.

   जब दी गई संख्या का आधार समान हो, तो सबसे कम घात वाली संख्या दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगी।

   Example: HCF of $6^3, 6^4, 6^7, 6^{10} = 6^3$

2. When the base is not same and there is no common factor in the base, then the required HCF of given numbers will be 1.

   जब आधार समान न हो और आधार में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, तो दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा।

   Example:- Find the HCF of 2^3, 9^2 and 7^3 ?

   Sol. Since base is not same and nothing is common then, HCF ($2^3, 9^2, 7^3$) = 1

➢ When 2 or 3 numbers are even their HCF will be even. If any one number is odd their HCF can not be even.

जब 2 या 3 संख्याएं सम हो तो उनका HCF भी सम होगा। यदि कोई एक संख्या विषम हैं, तो उनका HCF सम नहीं हो सकता।

If HCF of two numbers = H two numbers will be Hx, Hy

Where x, y are co-prime

$\therefore$ LCM= Hxy

Difference of number = H (x-y)

Sum of number = H (x+y)

HCF is present in LCM, difference and sum of the numbers.

$$\text{HCF of } [a^n \pm 1, a^m \pm 1] \text{ is } a^{\text{HCF}(n, m)} \pm 1$$

➢ ***Relation between LCM and HCF:-***

(i) Let the two numbers be 'a' and 'b'

So, $\boxed{a \times b = \text{LCM}(a, b) \times \text{HCF}(a, b)}$

and, $\frac{a \times b}{\text{HCF}(a,b)} = \text{LCM}(a, b)$

and, $\frac{a \times b}{\text{LCM}(a,b)} = \text{HCF}(a, b)$

(ii) Let the three number be a, b and c,

So, $\text{LCM}(a, b, c) = \frac{a \times b \times c \times \text{HCF}(a,b,c)}{\text{HCF}(a,b) \times \text{HCF}(b, c) \times \text{HCF}(c,a)}$

$\text{HCF}(a, b, c) = \frac{a \times b \times c \times \text{LCM}(a,b,c)}{\text{LCM}(a,b) \times \text{LCM}(b,c) \times \text{LCM}(c,a)}$

NOTE:-

i) Find the largest number which is exactly divisible by x, y, z./वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णत: विभाजित हो। *HCF of (x, y, z)*

ii) Find the largest number which when divided by x, y, z leaves remainder 'r' in each case./वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेषफल 'r' प्राप्त होता हो।

HCF [(x – r), (y – r), (z – r)] or

HCF [(x – y), (y – z), (z – x)]

(iii) Find the largest number which when divided by x, y, z leavesremainder a, b, c respectively./ वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से भाग देने पर शेषफल क्रमश: a, b, c प्राप्त होता हो। *HCF [(x – a), (y – b), (z – c)]*

PROBABILITY
प्रायिकता

CHAPTER
18

Some Basic Terms and Concepts
कुछ बुनियादी नियम और अवधारणाएँ

- ***Experiment:*** A process which result in some well-defined outcome is known as an experiment

  प्रयोग: एक प्रक्रिया जिसके परिणामस्वरूप कुछ अच्छी तरह से परिभाषित परिणाम होते हैं, उसे एक प्रयोग के रूप में जाना जाता है

  Example:- When a coin is tossed, we shall be getting either a head or a tail i.e. its outcome is a head or a tail. Which is well defined.

  उदाहरण: जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो हमें या तो हेड या टेल प्राप्त होगा, अर्थात इसका परिणाम हेड या टेल होगा। जो अच्छी तरह परिभाषित है।

- ***Random Experiment:*** Random experiment means all the outcomes of the experiment are known in advance, but any specific outcome of the experiment is not known in advance.

  यादृच्छिक प्रयोग: यादृच्छिक प्रयोग का अर्थ है कि प्रयोग के सभी परिणाम पहले से ज्ञात हैं, लेकिन प्रयोग के किसी विशिष्ट परिणाम का पहले से पता नहीं है।

  For Example:- Tossing a coin is a random experiment because there are only two possible outcomes, head and tail, and these outcomes are known well in advance. But the specific outcome of the experiment i.e. whether a head or a tail is not known in advance.

  उदाहरण के लिए: एक सिक्के को उछालना एक यादृच्छिक प्रयोग है क्योंकि केवल दो संभावित परिणाम हैं, हेड और टेल, और इन परिणामों को पहले से ही अच्छी तरह से जाना जाता है। लेकिन प्रयोग का विशिष्ट परिणाम अर्थात हेड या टेल पहले से ज्ञात नहीं है।

- ***Sample Space:*** The set of all possible outcomes of an experiment is called sample space and in general denoted by the letter S.

  प्रतिदर्श समष्टि: किसी प्रयोग के सभी संभावित परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है और इसे सामान्य रूप से अक्षर S द्वारा निरूपित किया जाता है।

  Example: When we toss a coin once, it may come up in either or two ways: Head (H) or Tail (T) So, there are two possible outcomes of this random experiment. Thus the sample space (S) of this random experiment is given by S = [H, T]

  उदाहरण: जब हम एक सिक्के को एक बार उछालते हैं, तो यह या तो दो तरीकों से ऊपर आ सकता है: हेड (H) या टेल (T) तो, इस यादृच्छिक प्रयोग के दो संभावित परिणाम हैं। इस प्रकार इस यादृच्छिक प्रयोग का नमूना समष्टि S = [H, T] द्वारा दिया गया है।

An Event:

- An outcome of a random experiment is called an event. In other words, an event is something that happens

  एक यादृच्छिक प्रयोग के परिणाम को एक घटना कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, एक घटना जो कुछ घटित होती है।

  - The probability of a sure event is 1./निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होती है।
  - The probability of an impossible event is 0./ एक असंभव घटना की संभावना 0 है।
  - The sum of the probabilities of all the outcomes (elementary events) of an experiment is 1./एक प्रयोग के सभी परिणामों (प्रारंभिक घटनाओं) की संभावनाओं का योग 1 है।
  - For any event A associated to a random experiment, we have/किसी यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित किसी भी घटना A के लिए, हमारे पास है।

(i) $0 \le P(A) \le 1$ (Quantitative value of probability of happening of any event is lie between 0 and 1)/ $0 \le P(A) \le 1$ (किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता का संख्यात्मक मान हमेशा शून्य तथा 1 के बीच होगा।)

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

P (A) = Probability of happening an event./P(A) = किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता।

$P(\overline{A})$ = Probability of not happening an event. /

$P(\overline{A})$ = घटना के घटित न होने की प्रायिकता।

In other words we can say sum of quantitative value of probability of happening an event and not happeining an event = 1/दूसरे शब्दों में किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता तथा घटना के घटित न होने की प्रायिकता के संख्यात्मक मान का योग 1 के बराबर होगा।

- Probability of an event can not be negative/ किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता का संख्यात्मक मान नकरात्मक नहीं हो सकता।

Measurement or Probability/ प्रायिकता का मापन

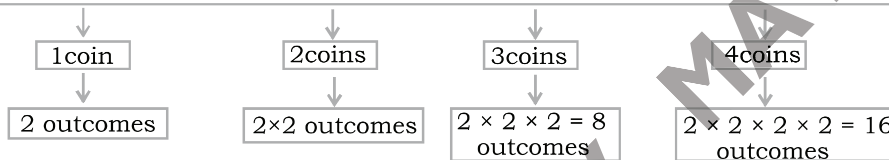
- The probability of an event denotes the likelihood of its happening:/किसी घटना के होने की प्रायिकता उसके होने की संभावना को दर्शाती है:
- If in a random experiment, the total number of events (outcomes) are n out of which m events (outcomes) are favourable to a particular event E: then the probability of happening of event E is de-

noted by P(E) and is equal to the ratio $\frac{m}{n}$ i.e. P(E) = Probability of the happening of event E = $\frac{m}{n}$ /यदि एक यादृच्छिक प्रयोग में, घटनाओं की कुल संख्या (परिणाम) n हैं, जिनमें से m घटनाएँ (परिणाम) किसी विशेष घटना E के अनुकूल हैं: तब घटना E के होने की प्रायिकता P(E) द्वारा निरूपित की जाती है।

यानी P(E) = $\frac{m}{n}$ घटना E के होने की प्रायिकता

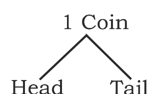
$= \dfrac{\text{Number of event (out comes) favourableto E/ अनुकूल परिणामों की कुल संख्या}}{\text{Total number of all possible out comes/ सभी संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$

1. When one coin is tossed then S = H, T
2. When two coins are tossed then S = HH, TT, HT, TH
3. When three coins are tossed than S = HHH, TTT, HTT, THT, TTH,THH, HTH, HHT
4. When four coins are tossed then S = HHHH, TTTT, HTTT, THTT, TTHT, TTTH HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HTHT, THTH, TTHH, HHTT, THHT HTTH.



Coins/सिक्कें:

(i) When single coin is tossed



Only two possible events (Head, Tail)

2^1-no. of coins

↓

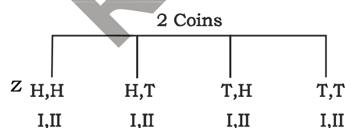
Total events (head and tail)

Probability of getting Head

$= \frac{1}{2}$ — Head / — Total Events

Probability of getting Tail = $\frac{1}{2}$ — Tail / — Total Events

(ii) When two coins are tossed.

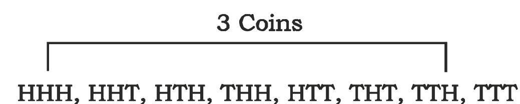


2^2 = 4 total outcomes

Probability of getting:

1. Two Heads = (H, H) = $\frac{1}{4}$
2. Two Tails = (T, T) = $\frac{1}{4}$
3. 1 Head = (T, H) (H, T) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
5. At least 1 Head = इसका मतलब कम से कम 1 Head दो हो तो भी चलेगा = (H, H) (H, T) (T, H) = $\frac{3}{4}$
6. At least 1 Tail = इसका मलतब कम से कम 1 Tail हो, दो हो तो भी चलेगा = (T, T) (H, T) (T, H) = $\frac{3}{4}$
7. At most 1 Head = इसका मतलब ज्यादा से ज्यादा 1 head हो ना हो तो भी चलेगा = (H, T) (T, H) (T, T) = $\frac{3}{4}$
8. At most 1 Tail = p = $\frac{3}{4}$

(iii) When 3 coins are tossed



2^3-no. of coins

↓

Total events (head and tail)

Total outcomes = 8

If 3 coins are tossed simultaneously then find the Probability of getting:

1. 3 Heads = (H,H,H) = $\frac{1}{8}$
2. 3 Tail = (T,T,T) = $\frac{1}{8}$
3. 2 Head = (HHT, HTH, THH) = $\frac{3}{8}$
4. 2 Tail = (HTT, THT, TTH) = $\frac{3}{8}$
5. At least 2 Heads = कम से कम दो heads हो, तीन होंगे तो भी चलेगा

   = (HHH, HHT, HTH, THH) = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$
6. At least 2 tail = कम से कम दो tail हो, तीन होंगे तो भी चलेगा

   = (TTT, TTH, THT, HTT) = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$
7. At most two heads = मतलब ज्यादा से ज्यादा दो heads हो, एक हो या ना हो तो भी चलेगा

   = (HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT) = $\frac{7}{8}$
8. At most two tails = मतलब ज्यादा से ज्यादा दो tail हो, एक हो या ना हो तो भी चलेगा

   = (HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH) = $\frac{7}{8}$
9. At least 1 head = कम से कम एक head हो ज्यादा कितने भी

   = एक केस छोड़कर (TTT) बाकी सभी में 1 head तो होगा। = $\frac{7}{8}$
10. At least 1 Tail = $\frac{7}{8}$
11. At most 1 Head = ज्यादा से ज्यादा 1 Head हो, ना हो तो भी चलेगा।

    (HTT, THT, TTH, TTT) = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$
12. At most 1 tail = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$
13. At least one head and one tail

    कम से कम 1 head और 1 tail

    (HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH)

    = 1 head और 1 tail भी है। = $\frac{6}{8}$ = $\frac{3}{4}$
14. No tails = (HHH) = $\frac{1}{8}$
15. No heads = (TTT) = $\frac{1}{8}$

1. When a die is thrown once then S = 1, 2, 3, 4, 5, 6 n(S) = 6
2. When two dice are thrown together or A die is thrown twice then

S = (1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5),(1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4),(2,5),(2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4),(3,5),(3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4),(4,5),(4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4),(5,5),(5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4),(6,5),(6,6)

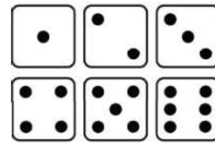
n(S) = 6 × 6 = 36

3. When 3 dice are thrown or a die is thrown thrice then

n(S) = 6 × 6 × 6 = 216

n(S)→ no. of outcomes in sample space

Dice: Number are written on each face 1,2,3,4,5,6



6^1 - no. of dice

1 Dice = ↓

1,2,3,4,5,6

Total number of outcomes = 6

1 dice total events = 1, 2, 3, 4, 5, 6

Probability of getting

1. Even no. = (2, 4 ,6) = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$
2. Odd no. = (1, 3, 5) = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$
3. Prime no. = (2, 3, 5) = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$
4. No. multiple of 3 = (3, 6) = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$
5. No. More than 3 = (4, 5, 6) = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$
6. No. Less than 3 = (1, 2) = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$
7. No. Less than 4 = 1, 2, 3 = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$
8. No. Less than 5 = (1, 2, 3, 4) = $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$
9. No. More than 4 = (5, 6) = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$

When two dice are thrown simultaneously

Two dice = 6^2 = 36 total outcomes

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

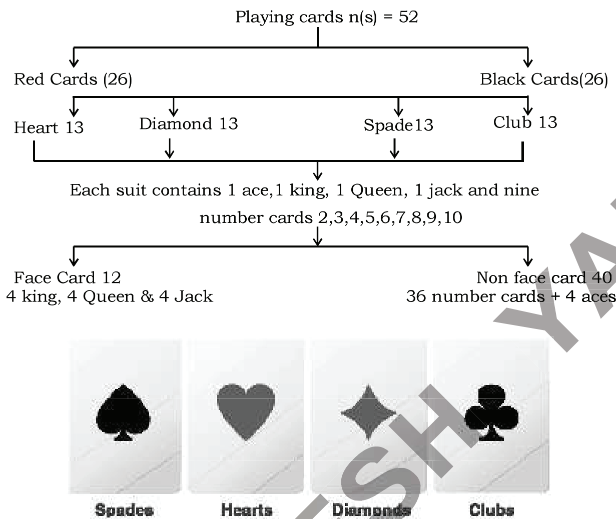
When two dice are thrown simultaneously find the Probability of getting:

1. 3 as the sum = (1, 2) (2, 1) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
2. Same no. on both dice (a doublet)

   = (1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
3. The sum as a prime number = (2, 3, 5, 7, 11)
   = (1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 3)(3, 2)(1, 4)(4, 1) (3, 4) (4, 3) (2, 5) (5, 2) (1, 6) (6, 1) (5, 6) (6, 5) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
4. A total of at least 10 = (10, 11, 12) कम से कम 10 का मतलब 11 और 12 भी हो सकता है।
   (6, 4) (4, 6) (5, 5) (6, 5) (5, 6) (6, 6)

   $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
5. Doublet of even number = (2, 2) (4, 4) (6, 6)

   $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$



Spade (Black color card)	हुकुम
Heart (Red color card)	पान
Club (Black color card)	चिडी
Diamond (Red color card)	ईट
Jack	गुलाम
Queen	बेगम
King	बादशाह
Ace	ईक्का

Important Figures in Cards/कार्ड में कुछ महत्वपूर्ण आंकड़े

Total cards = 52

Red cards = 26

Black cards = 26

(पान) Heart cards = 13

(ईट) Diamond cards = 13

(हुकुम) Spade cards = 13

(चिड़ी) Club cards = 13

Total king = 4	Total Jack = 4
Red king = 2	Red Jack = 2
Black king = 2	Black Jack = 2
Total queen = 4	Total Ace = 4
Red queen = 2	Red Ace = 2
Black queen = 2	Black Ace = 2

- Some pattern for All card (2 to 10)
  Total cards = 4
  Red card = 2
  Black card = 2
- King of spade/heart/diamond/Club = 1
- Queen of spade/heart/diamond/Club = 1
- Jack of spade/heart/diamond/Club = 1
- Ace of spade/heart/diamond/Club = 1
  2 of spade/heart/diamond/Club = 1
  3 of spade/heart/diamond/Club = 1
  .
  .
  .
  .
  10 of spade/heart/diamond/Club = 1
- Face card/ pictures card ⇒ Jack(4)/King(4)/Queen(4) = 12 cards
- Red face card ⇒ 2 (Jack) + 2(King) + 2(Queen) = 6
- Black face card ⇒ 2(Jack) + 2(King) + 2(Queen) = 6
- Face card of spade ⇒ 1(Jack) + 1(King) + 1(Queen) = 3
- Face card of heart ⇒ 1(Jack) + 1(King) + 1(Queen) = 3
- Face card of diamond ⇒ 1(Jack) + 1(King) + 1(Queen) = 3
- Face card or club ⇒ 1 (Jack) + 1(King) + 1(Queen) = 3

Find the probability of getting

प्राप्त करने के प्रायिकता ज्ञात कीजिए

- Black card = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
- Red card = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
- Card of spade = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- Card of heart = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

- Card of diamond = $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$
- Card of club = $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$
- Card of king = $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
- Red king = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Black king = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Card of queen = $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
- Red queen = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Black queen = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Card of jack = $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
- Red jack = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Black jack = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Card of Ace = $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
- Red Ace = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$
- Black Ace = $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$

Same as for 2 to 10

- Face card = $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$
- Red face card = $\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$
- Black face card = $\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$
- King of spade = $\frac{1}{52}$
- King of heart = $\frac{1}{52}$
- King of diamond = $\frac{1}{52}$
- King of club = $\frac{1}{52}$
- Queen of spade = $\frac{1}{52}$
- Queen of heart = $\frac{1}{52}$
- Queen of diamond = $\frac{1}{52}$
- Queen of club = $\frac{1}{52}$
- Not a black card = मतलब Red card आना चाहिये = $\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$
- Not a red card = मतलब Black card आना चाहिये = $\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$
- Not a spade card = Spade card = 13 $\Rightarrow$ Remaining card = 39 $\Rightarrow$ probability = $\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$
- Not a heart card = $\frac{3}{4}$
- Not a diamond card = $\frac{3}{4}$
- Not a club card = $\frac{3}{4}$
- Not a king = king = 4, total card = 52, Remaining card = 52 – 4 = 48, $\Rightarrow \frac{48}{52}=\frac{12}{13}$
- Not a queen = Queen = 4, total card = 52, Remaining card = 52 – 4 = 48, $\Rightarrow \frac{48}{52}=\frac{12}{13}$
- Not a ace = $\frac{12}{13}$
- Not a jack = $\frac{12}{13}$
- Not a red king = $\frac{50}{52}=\frac{25}{26}$ or $\Rightarrow 1-\frac{2}{52}=\frac{25}{26}$

- Not a red queen = $\frac{50}{52} = \frac{25}{26}$ or $\Rightarrow 1 - \frac{2}{52} = \frac{25}{26}$
- Not a red jack = $\frac{50}{52} = \frac{25}{26}$ or $\Rightarrow 1 - \frac{2}{52} = \frac{25}{26}$
- Not a red ace = $\frac{50}{52} = \frac{25}{26}$ or $\Rightarrow 1 - \frac{2}{52} = \frac{25}{26}$
- Not a face card = $\frac{40}{52} = \frac{10}{13}$
- Not a red face card = $\frac{46}{52} = \frac{23}{26}$ or $= 1 - \frac{6}{52} = 1 - \frac{3}{26} = \frac{23}{26}$
- Not a black face card = $\frac{46}{52} = \frac{23}{26}$ or $= 1 - \frac{6}{52} = 1 - \frac{3}{26} = \frac{23}{26}$
- 5 of heart or diamond = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
- Jack or queen = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
- Jack and queen = 0
- Ace and king = 0
- A queen or a jack = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
- A card with number less than 8 = 2(4cards) + 3 (4cards) + 4(4cards) +5(4cards) + 6(4cards) + 7(4cards) = $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$
- A card with number between 2 and 9 = 3 (4cards) + 4(4cards) +5(4cards) + 6(4cards) + 7(4cards) + 8(4cards) = $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$
- Either a black card or a king. = $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$
- Black and a king = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
- A jack, queen or a king = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$
- Neither a heart nor a king = (heart + king)'s card = 13 + 3 = 16

  $\Rightarrow = 1 - \frac{16}{52} = \frac{9}{13}$
- Spade or an Ace = (heart + king)'s card = 13 + 3 = 16 $\Rightarrow = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
- Neither an ace nor a king = 52 – 8 = 44 $\Rightarrow \frac{44}{52} = \frac{11}{13}$
- Neither a red card nor a queen = 26 + 2 = $1 - \frac{28}{52} = \frac{6}{13}$

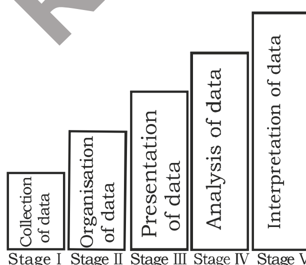
STATISTICS
सांख्यिकी

CHAPTER
19

Statistics: Statistics is the study of the *collection, analysis, interpretation, presentation,* and *organization* of data. In other words, It is a mathemaical discipline to collect summarize data Also we can say that statistics is a branch of a applied mathematics.

सांख्यिकी: सांख्यिकी *संग्रह, विश्लेषण, व्याख्या, प्रस्तुति* और डेटा के ***व्यवस्था*** का अध्ययन है। दूसरे शब्दों में, सारांश डेटा एकत्र करना एक गणितीय अनुशासन है साथ ही हम यह भी कह सकते हैं कि सांख्यिकी अनुप्रयुक्त गणित की एक शाखा है।

Stages of Statistical Study/ सांख्यिकीय अध्ययन के चरण



Statistical Tools/सांख्यिकीय उपकरण

Stages	Statistical Study	Statistical tools
Stage I	Collection of data	Census or sample techniques
Stage II	Organisation of data	Array of data and tally bars
Stage III	Presentation of data	Tables, graphs and diagrams
Stage IV	Analysis of data	Percentage, Averages, correlation and regression coefficients
Satage V	Interpretation of data	Magnitude of percentage, averages and the degree of relationship between different economics variables

- *Frequency:* Frequency is the number of times an item occurs (or repeats itself) in the series./ ***बारंबारता:*** मूल्यों की एक श्रेणी जिसमें वस्तुओं का एक समूह शामिल होता है, एक बारंबारता कहलाता है। उदाहरण के लिए।

  5–10,10–15....

- *Class Frequency:* The number of times an item repeats itself corresponding to a range of value (or class interval) is called class frequency./ *वर्ग आवृत्ति: मान की एक सीमा (या वर्ग अंतराल) के अनुरूप कोई वस्तु जितनी बार खुद को दोहराती है, उसे वर्ग आवृत्ति कहा जाता है।*
- *Class:* A range of values which incorporate a set of items is called a class. for eg. 5-10,10-15 ..../ *वर्ग:* मूल्यों की एक श्रेणी जिसमें वस्तुओं का एक समूह शामिल होता है, एक वर्ग कहलाता है। उदाहरण के लिए। 5–10,10–15 ...
- *Class limits:* The extreme values of a class are limits. Every class interval has two limits, lower limit and upper limit. Of the class interval 5-10 in the above example the lower limit is 5 and the upper limit is 10.

  वर्ग सीमाएँ: एक वर्ग के चरम मान सीमाएँ हैं। प्रत्येक वर्ग अंतराल की दो सीमाएँ होती हैं, निचली सीमा और ऊपरी सीमा। उपरोक्त उदाहरण में वर्ग अंतराल 5–10 की निम्न सीमा 5 है और उच्च सीमा 10 है।
- *Magnitude of a class interval:* Magnitude of a class inteval is the difference between the upper limit and the lower limit of a class. For example in a class inteval 10-15, the magnitude of the class interval would be 15–10=5. Thus,

  एक वर्ग अंतराल का परिमाण: एक वर्ग पूर्णांक का परिमाण एक वर्ग की ऊपरी परास और निचली परास के बीच का अंतर है। उदाहरण के लिए एक वर्ग अंतराल 10–15 में, वर्ग अंतराल का परिमाण 15–10=5 होगा। इस प्रकार,

Formula/सूत्र

$h = L_2 - L_1$

where,/जहां,

- h = magnitude of a class interval/h = एक वर्ग अंतराल का परिमाण
- L_2= upper limit of the class interval/L_2= वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा
- L_1 = lower limit of the class interval/L_1 = वर्ग अंतराल की निचली सीमा

Mid value:

$$\text{Mid value} = \frac{\text{Upper limit + lower limit}}{2}$$

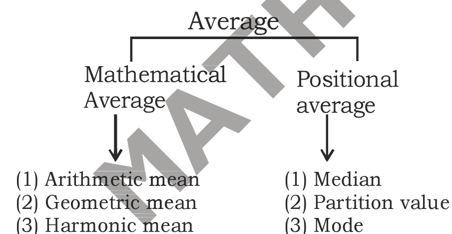
$$m = \frac{L_2+L_1}{2}$$

- *Tally Bars:* Every time an item occurs, a tally bar, (I) is marked against that item, similarly (II) for two items and (III) for 3 and (IIII) for 4 and (卌) for 5 This method of marking and counting is known as four and cross method.

  टेली बार्स : जब भी कोई आइटम होता है, एक टेली बार, (I) उस आइटम के समाने चिन्हित किया जाता है, इसी प्रकार (II) दो आइटम के लिए और (III) 3 के लिए और (III) 4 के लिए और 5 के लिए मार्किंग और काउंटिंग का यह तरीका चार और क्रांस विधि के रूप में जाना जाता हैं।
- *Types of statistical average:* Average are broadly classified into two categories:/सांख्यिकीय औसत के प्रकार: औसत को मोटे तौर पर दो श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है:

  1. Mathematical averages/गणितीय औसत

  2. Positional average/स्थितीय औसत
- Following chart reveals their further categorisation:/निम्नलिखित चार्ट से उनके और वर्गीकरण का पता चलता है:



- *Arithmetic mean:* Arithmetic mean is a simple average of all items in a series. It is the simplest measure of central tendencies.The arithmetic mean of a series is simply called 'Mean'/अंकगणितीय माध्य: अंकगणितीय माध्य एक श्रृंखला में सभी मदों का एक साधारण औसत है। यह केंद्रीय प्रवृत्तियों का सबसे सरल उपाय है। किसी श्रृंखला के अंकगणितीय माध्य को 'माध्य' कहा जाता है।

Formula /सूत्र

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3+.....+X_n}{N} = \frac{\sum X}{N}$$

Arithmetic mean is of two types:/अंकगणतीय माध्य दो प्रकार के होते हैं:

- *Simple Arithmetic mean:* In it, all items of a series are given equal importance /**सरल अंकगणितीय माध्य:** इसमें किसी श्रेणी की सभी मदों को उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार अलग-अलग भार दिए जाते हैं।
- *Weighted arithmetic mean:* In it different items of a series are accorded different weights in accordance with their relative importance./भारित अंकगणितीय माध्य: इसमें एक श्रृंखला की विभिन्न वस्तुओं को उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार अलग-अलग भार दिए जाते हैं।

Mean of Ungrouped Data/ असमूहीकृत डेटा का माध्य

☞ The heights of 6 boys are 146 cm, 154 cm, 153cm, 160 cm, 157 cm, and 160 cm. Find their mean height./6 लड़कों की लम्बाई 146 सेमी, 154 सेमी, 153 सेमी., 160 सेमी, 157 सेमी और 160 सेमी है। उनकी माध्य ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Sol./ हल

$$\text{Mean height} = \frac{\text{Sum of heights of all the boys}}{\text{Number of boys}}$$

$$\bar{x} = \frac{146+154+153+160+157+160}{6} = 155 \text{ cm}$$

Property of simple arithmetic Mean/साधारण अंकगणितीय माध्य/माध्य का गुण:

- ***Property 1.:*** If $\bar{x}$ is the mean of n numebrs of observations $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$, then the sum of deviations of $\bar{x}$ from the observation $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$, is zero i.e $\sum(\bar{x} - x)$

  यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$ की संख्याओं का माध्य $\bar{x}$ है, तो प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$ से विचलनों का योग है। ....., $\sum(\bar{x} - x)$ शून्य है अर्थात्

- ***Property 2.:*** If $\bar{x}$ is the mean of 'n' numbers of observations $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$, then the mean of observations $x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a, \ldots\ldots, x_n + a$, is $\bar{x}$ + a./यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$, की संख्या का माध्य है, तो प्रेक्षणों का माध्य $x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a, \ldots\ldots, x_n + a$, is $\bar{x}$ + a है।

  i.e. if each observation under consideration is increased by quantity a, then their mean is also increased by the same quantity a./अर्थात् यदि विचाराधीन प्रत्येक प्रेक्षण को मात्र a से बढ़ाया जाता है, तो उनका माध्य भी उसी मात्रा a से बढ़ जाता है।

- ***Property 3.:*** If $\bar{x}$ is the mean of n numbers of observations $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$, then the mean of obsevations $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \ldots\ldots, x_n - a$, is $\bar{x} - a$.

  यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$, की $\bar{x}$ संख्याओं का माध्य है, तो प्रेक्षणों $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \ldots, x_n - a$, का माध्य $\bar{x} - a$. है।

  i.e if each obsevation under consideration is decreased by quantity a, then their mean is also decreased by the same quantity a.

  यानी यदि विचाराधीन प्रत्येक प्रेक्षण को मात्र a से घटाया जाता है, तो उनका माध्य भी उसी मात्र a से कम हो जाता है।

- ***Property 4.:*** If $\bar{x}$ is the mean of n number of obsevations $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$, then mean of $ax_1, ax_2, ax_3, \ldots.. ax_n$ is $a\bar{x}$.

  यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$, की $\bar{x}$ संख्या का माध्य है, तो $ax_1, ax_2, ax_3, \ldots.. ax_n$ का $a\bar{x}$ माध्य है।

  i.e. if each observation under consideration is multipled by quantity a, then mean is also multipled by the same quantity a.

  यानी यदि विचाराधीन प्रत्येक अवलोकन को मात्र a से गुणा किया जाता है, तो माध्य को भी उसी मात्र a से गुणा किया जाता है।

- ***Property 5.:*** If $\bar{x}$ is the mean of n number of observations $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, then mean of $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a} \frac{x_2}{a}, \ldots.. \frac{x_n}{a}$ is $\frac{\bar{x}}{a}$

  i.e if each obervation under consideration is divided by quantity a, the mean is also divided by the same quantity a.

  यदि $\bar{x}$ प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, का माध्य है, तो $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a} \frac{x_2}{a}, \ldots.. \frac{x_n}{a}$ का माध्य $\frac{\bar{x}}{a}$ है यानी यदि विचाराधीन प्रत्येक अवलोकन को a से विभाजित किया जाता है, तो माध्य को भी उसी a से विभाजित किया जाता है।

- Methods of calculating simple arithmetic mean for ungrouped and grouped data./अवर्गीकृत और समूहीकृत डेटा के लिए सरल अंकगणितीय माध्य की गणना करने की विधियाँ।

- *Calculation of simple arithmetic mean in case of ungrouped data (individual series):* In the case of ungrouped data (individual series) arithmetic mean may be calculated by three methods:/गैर-समूहीकृत डेटा (व्यक्तिगत श्रृंखला) के मामले में सरल अंकगणितीय माध्य की गणना: गैर-समूहित डेटा (व्यक्तिगत श्रृंखला) के मामले में अंकगणितीय माध्य की गणना तीन विधियों द्वारा की जा सकती है:

  (a) Direct method./प्रत्यक्ष विधि।

  (b) Assumed mean method./कल्पित माध्य विधि।

  (c) Step-deviation method./चरण-विचलन विधि।

(a) *Direct method: Following steps are taken for this method/* ***प्रत्यक्ष विधि:*** इस विधि के लिए निम्नलिखित कदम उठाए जाते हैं-

(i) Add up values of all the items of a series $(\sum X)$ /किसी श्रृंखला की सभी वस्तुओं के मूल्यों को जोड़ें $(\sum X)$

(ii) Find out the total number of items in the series (N):/श्रृंखला (N) में वस्तुओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए:

(iii) Divide the total value of all the items $(\sum X)$ with the number of items (N). The resultant value would be the arithmetic mean./सभी वस्तुओं के कुल मूल्य $(\sum X)$ को वस्तुओं की संख्या (N) से विभाजित करें। परिणामी मूल्य अंकगणितीय माध्य होगा।

(b) *Short-cut method/Assumed mean method:* Following steps are taken for this method/शॉर्ट-कट विधि/अनुमानित औसत विधि: इस विधि के लिए निम्नलिखित कदम उठाए गए हैं।

(i) Prepare the frequency table in such a way that its first column consists of the values of the variable and the second column consists of the corresponding frequencies./ बारंबारता सारणी को इस प्रकार तैयार कीजिए कि इसके पहले स्तंभ में चर के मान हों और दूसरे स्तंभ में संगत बारंबारताएं हों।

(ii) Choose a number 'A' (preferable among the values in the first column) and take deviations $d_i = x_i - A$ of the values x_i of variable X about A. Write these deviations against the corresponding frequencies in the third column/एक संख्या 'A' चुनें (पहले कॉलम में मानों के बीच बेहतर) और विचलन लें $d_i = x_i - A$ के बारे में चर X के मान A का। इन विचलनों को तीसरे कॉलम में संबंधित आवृत्तियों के सामने लिखें

(iii) Multiply the frequencies in column II with the corresponding deviations d_i in column III to prepare column IV consisting of $f_i d_i$./$f_i d_i$ वाले कॉलम II को तैयार करने के लिए कॉलम III में संबंधित विचलन d_i के साथ कॉलम IV में आवृत्तियों को गुणा करें।

(iv) Find the sum of all entries in column III to obtain $\sum_{i=1}^{n} f_i d_i$ and the sum of all frequencies in column III to obtain $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$./प्राप्त करने के लिए कॉलम III में सभी प्रविष्टियों का योग और प्राप्त करने के लिए कॉलम III में सभी $\sum_{i=1}^{n} f_i d_i$ आवृत्तियों का योग $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$ खोजें।

(v) Use the formula $\overline{X} = A + \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i d_i\right)$/सूत्र $\overline{X} = A + \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i d_i\right)$ का प्रयोग करें।

(c) *Step-deviation method:*/चरण-विचलन विधि

(i) Obtain the frequency distribution and prepare the frequency table in such a way that its first column consists of the values of the variable and the second column corresponding frequencies./ बारंबारता बंटन प्राप्त कीजिए और बारंबारता सारणी इस प्रकार तैयार कीजिए कि इसके प्रथम स्तंभ में चर के मान हों और दूसरे स्तंभ में संगत बारंबारताएं हों।

(ii) Chose a number 'A' (generaly known as the assumed mean) and take deviations $d_i = x_i - A$ about A. Write these deviations against the corresponding fre-quencies in the third column./एक संख्या 'A' 'आमतौर पर कल्पित माध्य के रूप में जाना जाता है, को चुना और, के बारे में विचलन $d_i = x_i - A$ लिया। इन विचलनों को तीसरे कॉलम में संबंधित आवृत्तियों के सामने लिखें।

(iii) Chose a number h, generally common factor of all d_i's in III column, divide deviations d_i by h to get u_i. Write these u_i's against the corresponding d_i's in the IV column./III कॉलम में सभी d_i के सामान्य तौर पर सामान्य कारक के रूप में एक संख्या h चुना, u_i प्राप्त करने के लिए विचलन d_i को h से विभाजित करें। इन u_i's को IV कॉलम में संगत d_i's के सामने लिखें।

(iv) Multiply the frequencies in II column with the corresponding u_i's in IV column to prepare V column of $f_i u_i$. /u_i's का V कॉलम तैयार करने के लिए II कॉलम में आवृत्तियों को IV कॉलम में संगत $f_i u_i$ के साथ गुणा करें।

(v) Find the sum of all entries in V column to obtain/प्राप्त करने के लिए V कॉलम में सभी प्रविष्टियों का योग खोजें $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i u_i\right)$

(vi) Use the formula/सूत्र का प्रयोग करें

$$\overline{X} = A + h\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i u_i\right).$$

Calculation of simple arithmetic mean in case of grouped data: /समूहीकृत डेटा के मामले में सरल अंकगणितीय माध्य की गणना।

There are three methods of calculation of simple arithmetic mean in case of grouped data:/समूहीकृत डेटा के मामले में सरल अंकगणितीय माध्य की तीन विधियाँ हैं :-

(a) Direct method/प्रत्यक्ष विधि

(b) Assumed mean method/कल्पित माध्य विधि

(c) Step-deviation method/चरण-विचलन विधि

(a) *Direct method:* Direct method of calculating mean of the discrete series involves the following steps./**प्रत्यक्ष विधि:** असतत श्रृंखला के माध्य की गणना की प्रत्यक्ष विधि में निम्नलिखित चरण शामिल हैं।

(i) Values of the various items in the series are indicated by X. and their frequencies by 'f'/ श्रृंखला में विभिन्न मदों के मूल्यों को X द्वारा और उनकी आवृत्तियों को 'f' द्वारा दर्शाया गया है।

(ii) Each item is multiplied by its frequency no get 'fX'. These multiples are added to get $\sum fX$. That is, /प्रत्येक वस्तु को उसकी बारंबारता से गुणा करने पर 'fX' नहीं मिलता। इन गुणजों को प्राप्त करने के लिए $\sum fX$ जोड़ा जाता है। वह है,

$\sum fX = f_1X_1 + f_2X_2 + \ldots\ldots + f_nX_n$

(iii) Frequencies are added up to get $\sum f$. That is,/ प्राप्त करने के लिए आवृत्तियों को $\sum f$ जोड़ा जाता है। वह है

$\sum fX = f_1X_1 + f_2X_2 + ... + f_nX_n$

(iv) $\sum fX$ is divided by $\sum f$ to obtain the mean, $\overline{X}$. / $\sum fX$ माध्य प्राप्त $\sum f$ करने के लिए से $\overline{X}$ भाग दिया जाता है।

(b) *Assumed mean method:* Assumed mean method of estimating mean of the discrete frequency series uses the following formula./**कल्पित माध्य विधि:** असतत आवृत्ति श्रृंखला के माध्य का अनुमान लगाने की कल्पित माध्य विधि में निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है।

(i) Before calculating the actual average of the series, some value which lies in the middle of the series is taken as assumed mean./ श्रृंखला के वास्तविक औसत की गणना करने से पहले, कुछ मान जो श्रृंखला के मध्य में होते हैं, उन्हें कल्पित माध्य के रूप में लिया जाता है।

(ii) Deviation of each value of different items in the series is calculated from the assumed mean. The deviation is noted against the concerned item of the series, The deviation may be positive (+) or negative (–). Accordingly./श्रृंखला में विभिन्न मदों के प्रत्येक मूल्य के विचलन की गणना कल्पित माध्य से की जाती है। विचलन को श्रृंखला के संबंधित आइटम के सामने नोट किया जाता है, विचलन धनात्मक (+) या (–1) हो सकता है। इसलिए,

(iii) Find the multiple of 'd' and its corresponding 'f' that is, 'fd' add up, separately, the positive (+) and negative (–) values of all 'fd'. Find out the difference between the two to get '$\sum fd$'./'d' का गुणक और उसके संबंधित 'f' का पता लगाएं, यानी 'fd' सभी 'add' के धनात्मक (+) और नकारात्मक (–) मानों को अलग-अलग जोड़ता है। प्राप्त करने के लिए दोनों के बीच अंतर ज्ञात कीजिए।

(iv) Add up all frequencies, to get $\sum f$ /प्राप्त करने के लिए सभी आवृत्तियों को जोड़ें

(v) Divide $\sum fd$ by $\sum f$ that is, $\frac{\sum fd}{\sum f}$.

(c) *Step-deviation method/*चरण-विचलन विधि:

(i) Step-deviation d' is obtained by dividing the deviation (of the actual value from the assumed mean) by the common factor./सामान्य कारक द्वारा विचलन (कल्पित माध्य से वास्तविक मूल्य) को विभाजित करके चरण-विचलन d' प्राप्त किया जाता है।

(ii) Each step deviation is multiplied with its frequency to get fd'. Sum total of the fd' is obtained to get $\sum fd'$ / fd' प्राप्त करने के लिए प्रत्येक चरण विचलन को इसकी आवृत्ति से गुणा किया जाता है। fd' का कुल योग $\sum fd'$ प्राप्त करने के लिए प्राप्त किया जाता है

(iii) $\sum fd'$ is dividfed by $\sum f$, and then multiplied by the common factor 'C'. The resultant value is added to A get the actual average of the series. Thus/ $\sum fd'$ से विभाजित किया जाता है, और उसके बाद $\sum f$ सामान्य कारक 'C' से गुणा किया जाता है। परिणामी मान को श्रृंखला का वास्तविक औसत प्राप्त करने के लिए A में जोड़ा जाता है। इस प्रकार,

Positional averages/स्थितीय औसत

(a) Median/माध्यिका

(b) Mode/मोड

(c) Partition value/विभाजन मूल्य

(i) Quartile/चतुर्थक

(ii) Decile/डेसिल

(iii) Percentile/प्रतिशतक

(a) *Median:* "The median is that value of the variable which divides the group into two equal parts, one part comprising all values greater than the median value and the other part comprising all the values smaller than the median value"./माध्यिका: "माध्यिका चर का वह मान है जो समूह को दो समान भागों में विभाजित करता है, एक भाग माध्य मान से अधिक सभी मानों की तुलना करता है और दूसरा भाग माध्य मान से छोटे सभी मानों की तुलना करता है"।

*Calculation of median in case of ungrouped data (individual series)/*अवर्गीकृत डेटा (व्यक्तिगत श्रृंखला) के मामले में माध्यिका की गणना।

Calculation of median in case of ungrouped data involves the following steps:/अवर्गीकृत डेटा के मामले में माध्यिका की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल हैं–

(i) Arrange all the values of different items of a series in the ascending or descending order / किसी श्रृंखला की विभिन्न मदों के सभी मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

(ii) Add up the number of items, indicated by N. Find out the median item as $\left(\frac{N+1}{2}\right)$th items./ पदों की संख्या जोड़ें, जो N द्वारा इंगित की गई है। $\left(\frac{N+1}{2}\right)$वें पद के रूप में माध्यिका पद का पता लगाएं।

(iii) If N of series happens to be an odd number.

Median = size of $\left(\frac{N+1}{2}\right)$th term./यदि श्रृंखला का N एक विषम संख्या है। मध्यिका = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वें पद का आकार।

(iv) When N of the series is an number, median is estimated using the following formula/जब श्रृंखला का N एक संख्या है, तो माध्यिका का अनुमान निम्न सूत्र का उपयोग करके लगाया जाता है।

$$M = \frac{\text{Size of}\left(\frac{N}{2}\right)\text{th term + size of}\left(\frac{N}{2}+1\right)\text{th term}}{2}$$

Note/नोट: Whether the given terms are arranged in ascending or descending order, the value of median always remains the same./दिए गए पदों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो माध्यिका का मान हमेशा समान रहता है।

Calculation of median in case of grouped data. /समूहीकृत डेटा के मामले में माध्यिका की गणनाः-

(a) *Discrete series:* Calculation of median in case of discrete series of frequency array involves the following steps./**असतत श्रृंखलाः** आवृत्ति सरणी की असतत श्रृंखला के मामले में माध्यिका की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल हैं।

(i) Arrange the data into ascending (or descending) order./आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करें।

(ii) Convert the simple frequencies of a series into cumulative frequencies, /किसी श्रृंखला की सरल आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों में परिवर्तित करें।

(iii) Determine the $\left(\frac{N+1}{2}\right)$th term of the series, N being equal to $\sum f$./N के बराबर होने पर, श्रृंखला का $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद निर्धारित करें।

(iv) Find the median value corresponding to the $\left(\frac{N+1}{2}\right)$th term / $\left(\frac{N+1}{2}\right)$वें पद के संगत माध्यिका मान ज्ञात कीजिए।

(b) *Continuous series:* Calculation of median in a continous series involves the following steps./ सतत श्रृंखलाः एक सतत श्रृंखला में माध्यिका की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल हैं।

(i) The data are arranged in ascending or descending orders of their class interval/ आँकड़ों को उनके वर्ग अंतराल के आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है

(ii) The frequencies are then converted into cumulative frequencies./फिर आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों में परिवर्तित किया जाता है।

(iii) Median class of the series is identified. It corresponds to that cumulative frequency which includes the $\left(\frac{N}{2}\right)$th term/श्रृंखला के माध्यिका वर्ग की पहचान की जाती है। यह उस संचयी आवृत्ति के अनुरूप है जिसमें $\left(\frac{N}{2}\right)$वां पद शामिल है।

(iv) The following is applied to determine the actual median value./वास्तविक मध्यिका मान को निर्धारित करने के लिए निम्नलिखित सूत्र को लागू किया जाता है।

Formula/सूत्रः

$$M = l + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times h$$

- *Mode:* "The value of the variable which occurs most frequency in a distribution is called mode."/ ***बहुलकः*** चर का वह मान जो किसी बंटन में सबसे अधिक बारंबारता में आता है, बहुलक कहलाता है।
- *Calculation of mode for ungroup data:* Just by inspection we can check which value occurs most time that will be the mode.

असमूहीकृत डेटा के लिए बहुलक की गणनाः निरीक्षण द्वारा हम जांच सकते हैं कि कौन सा मूल्य सबसे अधिक बार होता है जो कि बहुलक होगा।

- *Calculation of mode for group data:* We will use the following formula for calculating the mode/समूह डेटा के लिए बहुलक की गणनाः हम बहुलक की गणना के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करेंगे।

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

Z = value of the mode./बहुलक का मान।

- l_1 = lower limit of the modal class./मोडल क्लास की निचली सीमा।
  - f_1 = The frequency of the modal class./मॉडल वर्ग की आवृत्ति।
  - f_0 = The frequency of pre-modal class. /पूर्व-मोडल वर्ग की आवृत्ति।
  - f_2 = Frequency of the next higher class or post-modal class./अगले उच्च वर्ग या उत्तर-मोडल वर्ग की आवृत्ति।

i = Size of the modal group./मॉडल समूह का आकार।

- *Quartile/ चतुर्थक*: If a statistical series is divided into four equal parts, the end value of each part is called a quartile. It is written as Q. The first quartile or Q_1 is also known as lower quartile. The second quartile, or Q_2 is the same as median of the series. The third quartile, or Q_3 is also called upper quartile./यदि एक सांख्यिकीय श्रृंखला को चार बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक भाग का अंतिम मान चतुर्थक कहलाता है। इसे Q लिखा जाता है। प्रथम चतुर्थक या Q_1 को निम्न चतुर्थक भी कहते हैं। दूसरा चतुर्थक, या Q_2, श्रृंखला की माध्यिका के समान है। तीसरे चतुर्थक, या Q_3 को ऊपरी चतुर्थक भी कहा जाता है।
- *Estimation of Q_1 and Q_3:* Quartile values (Q_1 and Q_3) are estimated differently for different sets of series, as number./Q_1 और Q_3 का अनुमान: चतुर्थक मान (Q_1 और Q_3) श्रृंखला के अलग-अलग सेटों के लिए संख्या के रूप में अलग-अलग समयबद्ध हैं।
- *Calculation of quartiles in Individual and discrete series:* For the individual and discrete series, Q_1 and Q_3 are determined using the following formulae./व्यक्तिगत और असतत श्रृंखला में चतुर्थक की गणना: व्यक्तिगत और असतत श्रृंखला के लिए, Q_1 और Q_3 को निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग करके निर्धारित किया जाता है।

Q_1 = size of $\left(\frac{N+1}{4}\right)$th term of the series/$Q_1$ = श्रृंखला के $\left(\frac{N+1}{4}\right)$वें पद का आकार

Q_3 = Size of $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$th term of the series./$Q_3$ = श्रृंखला के $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ पद का आकार।

In individual series, N = Number of items,

- While in discrete series, N = Sum of frequencies, $\sum f$./व्यक्तिगत श्रृंखला में, N = मदों की संख्या, जबकि असतत श्रृंखला में, N = आवृत्तियों का योग, $\sum f$
- *Calculation of quartiles in continuous series:* In continuous series (frequency distribution), the class interval of Q_1 and Q_3 are first identified as under:/ निरंतर श्रृंखला में चतुर्थक की गणना: निरंतर श्रृंखला (आवृत्ति वितरण) में, Q_1 और Q_3 के वर्ग अंतराल को पहले निम्नानुसार पहचाना जाता है:

Class interval of Q_1= size of $\left(\frac{N}{4}\right)$th term/Q_1 का वर्ग अंतराल = $\left(\frac{N}{4}\right)$वें पद का

Class interval of Q_3= size of $3\left(\frac{N}{4}\right)$th term/$Q_3$ का वर्ग अंतराल = $3\left(\frac{N}{4}\right)$पद का

Formula/सूत्र

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left[\frac{N}{4} - c.f\right]}{f} \times i$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{\left[3\left(\frac{N}{4}\right) - c.f\right]}{f} \times i$$

- *Decile:* Deciles distribute the series into ten equal parts, and is generally expressed as D. Accordingly, we have nine deciles, $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_9$, of a series. These are estimated for different types of series as under:/दशमांश: दशमक श्रृंखला को दस समान भागों में वितरित करते हैं, और आम तौर पर D के रूप में व्यक्त किया जाता है। तदनुसार, हमारे पास एक श्रृंखला के नौ दशमक, $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_9$ हैं। इन्हें विभिन्न प्रकार की श्रृंखलाओं के लिए निम्नानुसार अनुमानित किया गया है:
- *Calculation of deciles in Individual and discrete series:* Following formulae are used in the estimation of D_1, D_4 or D_9 respectively./व्यक्तिगत और असतत श्रृंखला में डेसील की गणना: क्रमशः D_1, D_4 या D_9 के अनुमान में निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग किया जाता है।

D_1 = Size of $\left(\frac{N+1}{10}\right)$th term/$D_1$ = $\left(\frac{N+1}{10}\right)$ वें पद का आकार

D_4 = Size of $4\left(\frac{N+1}{10}\right)$th term/$D_4$ = $4\left(\frac{N+1}{10}\right)$वें पद का आकार

D_9 = Size of $9\left(\frac{N+1}{10}\right)$ th term/D_9 = $9\left(\frac{N+1}{10}\right)$वें पद का आकार

- *Calculation of deciles in continuous series (Frequency distribution):* In continuous series (frequency distribution), first the class interval of the concerned decile is identified using the following formulae./सतत श्रृंखला (आवृत्ति वितरण) में दशमकों की गणना: सतत श्रृंखला (आवृत्ति वितरण) में, पहले संबंधित दशमक के वर्ग अंतराल को निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग करके पहचाना जाता है।

Class interval of D_1= Size of $\left(\frac{N}{10}\right)$th term/$D_1$ का वर्ग अंतराल = $\left(\frac{N}{10}\right)$ वें पद का आकार

Class interval of D_4= Size of $4\left(\frac{N}{10}\right)$th term/$D_4$ का वर्ग अंतराल = $4\left(\frac{N}{10}\right)$ वें पद का आकार

Class interval of D_9= Size of $9\left(\frac{N}{10}\right)$th term/$D_9$ का वर्ग अंतराल = $9\left(\frac{N}{10}\right)$वें पद का आकार

- Actual value of the concerned decile is calculated using the following formulae./संबंधित डेसील के वास्तविक मूल्य की गणना निम्न सूत्रों का उपयोग करके की जाती है।

$$D_1 = l_1 + \left[\frac{\left(\frac{N}{10}\right) - c.f}{f}\right] \times i$$

$$D_4 = l_1 + \left[\frac{4\left(\frac{N}{10}\right) - c.f}{f}\right] \times i$$

$$D_9 = l_1 + \left[\frac{9\left(\frac{N}{10}\right) - c.f}{f}\right] \times i$$

Example

- Find the lower quartilem upper quartile and inter quartile range for the data: 9, 11, 15, 19, 17, 13, 7.

Sol.

- On arranging the given data is ascending order of their magnitudes, we get:
  7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
  Clearly, n = 7, which is an odd number.

$\therefore$ Lower quartile (Q_1) = $\left(\frac{n+1}{4}\right)^{th}$ term = $\left(\frac{7+1}{4}\right)^{th}$ term
= 2^{nd} term = 9

Upper quartile (Q_3) = $\left(\frac{3(n+1)}{4}\right)^{th}$ term

= $\left(\frac{3(7+1)}{4}\right)^{th}$ term = 6th term = 17

Inter-quartile range = $Q_3 - Q_1$ = 17 – 9 = 8

Example

- From the following data, calculate Q_1, Q_3, and D_5.

S.No. 21 15 40 30 26 45 50 54 60 65 70

Sol. The data is first arranged in ascending order:

S. No.	X
1	15
2	21
3	26
4	30
5	40
6	45
7	50
8	54
9	60
10	65
11	70
N = 11	

Q_1 = Size of $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ th item

= Size of $\left(\frac{11+1}{4}\right)$ th item = Size of 3rd item = 26

Q_3 = Size of $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ th item = Size of $3\left(\frac{11+1}{4}\right)$ th item

= Size of 9th item = 60

Inter-quartile range = $Q_3 - Q_1$ = 60 – 26 = 34

D_5 = Size of $5\left(\frac{N+1}{10}\right)$ th item

= Size of $5\left(\frac{11+1}{10}\right)$ th item

= Size of 6th item = 45

Thus, Q_1 = 26, Q_3 = 60, D_5 = 45

Measures of Dispersion/फैलाव के गणना:

- *Dispersion:* "Dispersion is the measure of the variation of the items."/**फैलाव:** "फैलाव वस्तुओं की भिन्नता का माप है।"
- *In the words:* "The degree to which numerical data tend to spread about an average value is called the variation or dispersion of the data"/**शब्दों में:** "औसत मूल्य के बारे में संख्यात्मक डेटा जिस डिग्री तक फैलता है, उस डेटा को भिन्नता या फैलाव कहा जाता है।"
- There are two measures of dispersion as following/ निम्नलिखित के रूप में फैलाव के दो उपाय हैं:
  - (a) *Absolute measure:* When dispersion of the series is expressed in terms of the original unit of the series, it is called absolute measure of dispersion./पूर्ण माप: जब श्रृंखला के फैलाव को श्रृंखला की मूल इकाई के संदर्भ में व्यक्त किया जाता है, तो इसे फैलाव का पूर्ण माप कहा जाता है।
  - (b) *Relative measure*: The relative measure of disperion expresses the variability of data in terms of some relative value or percentage./ सापेक्ष माप: फैलाव का सापेक्ष माप कुछ सापेक्ष मूल्य या प्रतिशत के संदर्भ में डेटा की परिवर्तनशीलता को व्यक्त करता है।
- *Relative measure of disperion is known as coefficient of dispersion./*फैलाव के सापेक्ष माप को फैलाव के गुणांक के रूप में जाना जाता है।

	Absolute measure	**Relative measure**
Measures based on spread of values →	(1) Range (2) Quartile deviation; Inter quartile range	Coefficient of range Coefficient of quartile Deviation
Measures of dispersion from average →	(3) Mean deviation (4) Standard deviation	Coefficient of mean deviation coefficient of standard deviation, coefficient of variation
Graphical measure of dispersion →	(5) Lorenz curve	

- *All the above topics are not relevant for SSC exam point of view so we will discuss here only those topics which are relevant to SSC exam point of view./*उपरोक्त सभी विषय एसएससी परीक्षा के दृष्टिकोण से प्रासंगिक नहीं हैं, इसलिए हम यहां केवल उन विषयों पर चर्चा करेंगे जो SSC परीक्षा के दृष्टिकोण से प्रासंगिक हैं।
- *Range:* Range is the difference between the highest value and the lowest value in a series./परास उच्चतम मूल्य और श्रृंखला में सबसे कम मूल्य के बीच का अंतर है।

  R = H – L

  R = Range

  - H = Highest value in the series/H = श्रृंखला में उच्चतम मूल्य
  - L = Lowest value in the series/L = श्रृंखला में सबसे कम मूल्य

Example/ उदाहरण

- Find the range for the data 10,20 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130 .

  10, 20 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130 के लिए परास ज्ञात कीजिए।

  Range = H – L =130 – 10 = 120.

Coefficient of range/परास का गुणांक:

Coefficient of range/परास का गुणांक (CR) = $\frac{H-L}{H+L}$

Example/ उदाहरण

- Find the coefficient of range for the data 10, 20 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130 .

  डेटा 10, 20 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130 के लिए परास का गुणांक ज्ञात कीजिए।

  CR = $\frac{H-L}{H+L} = \frac{130-10}{130+10} = \frac{120}{140} = 0.857$ ans.

- Range and coefficient of range for ungrouped data/individual series/अवर्गीकृत डेटा/व्यक्तिगत श्रृंखला के लिए परास और परास का गुणांक:

Example/ उदाहरण

- For the following data find the range and cofficient of range?/निम्नलिखित डेटा के लिए परास और परास का गुणांक ज्ञात करें?

  30,50,70,90,110,130,150,170

  R = H – L = 170 – 30 = 140

  CR = $\frac{H-L}{H+L} = \frac{170-30}{170+30} = \frac{140}{200} = 0.70$ ans.

- *Range and coefficient of range for grouped data/* समूहीकृत डेटा के लिए परास और परास का गुणांक।

- ***Discrete series:*** Range of the discrete series is determined as the difference between in the highest value and the lowest value of the series. Frequency of the series is not taken into account./ **असतत श्रृंखला:** असतत श्रृंखला की परास उच्चतम मूल्य और श्रृंखला के निम्नतम मूल्य के बीच के अंतर के रूप में निर्धारित की जाती है। श्रृंखला की आवृत्ति को ध्यान में नहीं रखा जाता है।

Example/ उदाहरण

- Calculate range and coefficient of range of the following data./निम्नलिखित डेटा का परास और परास के गुणांक की गणना करें।

Size	10	15	20	25	30	35
Frequency	1	7	11	19	3	31

From the above table/उपरोक्त तालिका से

H = 35, L = 10

Range/परास = H – L = 35 – 10 = 25

Coefficient of Range/परास का गुणांक = $\frac{H-L}{H+L}$

$\frac{35-10}{35+10} = \frac{25}{45} = 0.56$

2. Continuous series: In case of frequency distribution series, we have find the. Difference between lower limit of the first interval and upper limit of the last interval in the series difference between these values would be the range of the series./**सतत श्रृंखला:** आवृत्ति वितरण श्रृंखला के मामले में, हमने पाया है। श्रृंखला में पहले अंतराल की निचली परास और अंतिम अंतराल की ऊपरी परास के बीच का अंतर इन मूल्यों के बीच अंतर श्रृंखला की परास होगी।

- *Range = upper limit of the last class interval – Lower limit of the first class interval* /परिसर = अंतिम वर्ग अंतराल की ऊपरी परास – प्रथम वर्ग अंतराल की निचली सीमा।

Example/ उदाहरण

84. For the following table find the coefficient of range /निम्न तालिका के लिए परास का परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

Size	Frequency
10-20	5
20-30	7
30-40	8
40-50	13
50-60	19
60-70	2

From the above table/उपरोक्त तालिका से

L = 10, H = 70

Range/श्रेणी = 70 – 10 = 60

Coefficient of range/रंग का गुणांक = $\frac{H - L}{H + L}$

= $\frac{70-10}{70+10} = \frac{60}{80}$ =.75 ans.

➢ *Inter Quartile range and quartile deviation (QD) and their coefficient:/ अंतर चतुर्थक परास और चतुर्थक विचलन (QD) और उनका गुणांक:*

- *Inter Quartile range:* Difference between third quartile (Q_3) and first quartile (Q_1) of a series, is called inter quartile range./**इंटर क्वार्टाइल रेंज:** किसी सीरीज के तीसरे क्वार्टाइल (Q_3) और पहले क्वार्टाइल (Q_1) के बीच के अंतर को इंटर क्वार्टाइल रेंज कहा जाता है।
- *Inter quartile range/ इंटर क्वार्टाइल रेंज* = $Q_3 - Q_1$
- *Quartile deviation/ चतुर्थक विचलन* = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$
- *Coefficient of quartile deviation/ चतुर्थक विचलन का गुणांक* = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

➢ Calculation of quartile deviation and coefficient of quartile diviation for different types of statistical data of statistical series.

साांख्यिकीय श्रृंखला के विभिन्न प्रकार के सांख्यिकीय डेटा के लिए चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन के गुणांक की गणना।

➢ Quartile deviation for ungrouped data/असमूहीकृत डेटा के लिए चतुर्थक विचलन:

- Coefficient of QD/QD का गुणांक = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

➢ *Standard deviation:* "This is sometimes called as root mean square deviation. This is generally denoted by of the greek language. Standrad deviation is the square root of the arithmetic mean of the squares of deviations of the items from their mean value."/ *मानक विचलन:* "इसे कभी-कभी मूल माध्य वर्ग विचलन कहा जाता है। यह आमतौर पर ग्रीक भाषा द्वारा निरूपित किया जाता है। मानक विचलन उनके औसत मूल्य से वस्तुओं के विचलन के वर्गों के अंकगणितीय माध्य का वर्गमूल है।

➢ *In the words,* "The standrad deviation is the square root of the arithmetic mean of the squares of all deviations. Deviations being measured from arithmetic mean of the items."/शब्दों में, "मानक विचलन सभी विचलनों के वर्गों के अंकगणितीय माध्य का वर्गमूल है। वस्तुओं के अंकगणितीय माध्य से विचलन मापा जाता है।"

Coefficient of standard deviation/मानक विचलन का गुणांक: = $\frac{\sigma}{\overline{X}}$

➢ Calculation of standard deviations for different types of statistical data or statistical series:/के लिए मानक विचलन की गणना विभिन्न प्रकार के सांख्यिकीय डेटा या सांख्यिकीय श्रृंखला:

- Standard deviation for ungrouped data. There are four methods of calculating standard deviations in case of ungrouped data/असमूहीकृत डेटा के लिए मानक विचलन अवर्गीकृत डेटा के मामले में मानक विचलन की गणना के चार तरीके हैं।

  (a) Actual mean method/वास्तविक माध्य विधि

  (b) Assumed mean method/कल्पित माध्य विधि

  (c) Direct method/प्रत्यक्ष विधि

  (d) Step-mean method/चरण-माध्य विधि

(a) *Actual mean method/*वास्तविक माध्य विधि: Steps for calculating standard deviation./मानक विचलन की गणना के लिए सबसे पहले, संबंधित श्रृंखला का वास्तविक माध्य मान निर्धारित किया जाता है। यानि हमें पता चलता है।

(i) First of all, actual mean value of the concerned series is determined. That is, we find out $\overline{X}$ / सबसे पहले, संबंधित श्रृंखला का वास्तविक माध्य $\overline{X}$ मान निर्धारित किया जाता है। यानी हमें पता चलता है।

(ii) Deviation of each items from $\overline{X}$ is determined. That ism we find the values of x as, x = $X - \overline{X}$ / प्रत्येक मद का विचलन निर्धारित होता है। यही कारण है कि हम $\overline{X}$ के मानों को, x = $X - \overline{X}$ के रूप में पाते हैं

(iii) Each value of the deviation is squared. The sum total of the square of the deviations is obtained. That is, we find out $\sum x^2$./विचलन का प्रत्येक मान चुकता होता है। विचलनों के वर्ग का कुल योग प्राप्त होता है। यानि हमें $\sum x^2$ पता चलता है।

(iv) $\sum x^2$ is divided by the number of items (N) in the series. Square root of $\frac{\sum x^2}{N}$ Now, formula used for calculating standard deviation./ $\sum x^2$ श्रृंखला में आइटम (N) की संख्या से विभाजित है। अब का वर्गमूल, मानक विचलन की गणना के लिए प्रयुक्त सूत्र।

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \text{ or } \sqrt{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)}{N}}$$

Example/ उदाहरण

➢ Calculate the standard deviation for the following data./ निम्नलिखित डेटा के लिए मानक विचलन की गणना करें।

5, 10, 25, 30, 50

- First step is to calculate/गणना करने के लिए पहला कदम है। $\overline{X} = \frac{5+10+25+30+50}{5} = \frac{120}{5}$ =24

X	$d(X-\bar{X})$	d^2
5	–19	361
10	–14	196
25	+1	1
30	+6	36
50	+26	676
	0	1270

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$, $\sigma = \sqrt{\frac{1270}{5}} = \sqrt{254} = 15.937$

(b) *Assumed mean method/कल्पित माध्य विधि:* Following stepes should be taken to calculate standard deviation/मानक विचलन की गणना करने के लिए निम्नलिखित कदम उठाए जाने चाहिए।

(i) We take any value of the series as assumed average, generally written as A./हम श्रृंखला के किसी भी मूल्य को अनुमानित औसत के रूप में लेते हैं, जिसे आम तौर पर A के रूप में लिखा जाता है।

(ii) Deviations of all items are obtained from the assumed average. Sum total of these deviations is obtained as $\sum(X-A)$ or $\sum dx$/सभी मदों के विचलन अनुमानित औसत से प्राप्त किए जाते हैं। इन विचलनों का योग $\sum(X-A)$ या $\sum dx$ के रूप में प्राप्त किया जाता है।

- Also, we square up the deviations are obtain their sum total as $(X-A)^2$ or $\sum dx^2$ /साथ ही, हम विचलनों का वर्ग अप करते हैं और उनका कुल योग $(X-A)^2$ या $\sum dx^2$ के रूप में प्राप्त करते हैं।

  Now, use the following formula for calculating standard deviations/अब, मानक विचलन की गणना के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करें।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2} \text{ or, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

Example/ **उदाहरण**

➢ Calculate the standard deviation for the following data by assumed mean method ?/कल्पित माध्य विधि द्वारा निम्नलिखित आंकड़ों के लिए मानक विचलन की गणना करें?

5, 10, 25, 30, 50

➢ For the same values, deviations may be calculated from any arbitrary value $A\bar{x}$ such that $d = X - A\bar{x}$. Taking $A\bar{x} = 25$, the computation of the standard deviation is shown below/समान मूल्यों के लिए, विचलन की गणना किसी भी मनमाने मूल्य $A\bar{x}$ से की जा सकती है जैसे कि $d = X - A\bar{x}$ लेकर, $A\bar{x} = 25$ मानक विचलन की गणना नीचे दिखाई गई है।

X	$d(x-A\bar{x})$	d^2
5	–20	400
10	–15	225
25	0	0
30	+5	25
50	+25	625
	–5	1275

$$\sigma = \sqrt{\frac{1275}{5} - \left(\frac{-5}{5}\right)^2} = 254 = 15.937$$

Note/ध्यान दें

That the sum of deviations from a value other than actual mean will not be equal to zero. Standard deviation is not affected by the value of the constant from which deviations are calculated. The value of the constant does not figure in the standard deviation formula. Thus, Standard deviation is Independent of Origin.

वास्तविक माध्य के अलावा किसी अन्य मान से विचलन का योग शून्य के बराबर नहीं होगा। मानक विचलन उस स्थिरांक के मान से प्रभावित नहीं होता है जिससे विचलन की गणना की जाती है। स्थिरांक का मान मानक विचलन सूत्र में अंकित नहीं होता है। इस प्रकार, मानक विचलन उत्पत्ति से स्वतंत्र है।

(c) *Direct method/प्रत्यक्ष विधि:* Standard deviation in case of individual series can be calculated using the following formula. It is called direct method as it calculates standard deviation from the values directly without taking deviations./व्यक्तिगत श्रृंखला के मामले में मानक विचलन की गणना निम्न सूत्र का उपयोग करके की जा सकती है। इसे प्रत्यक्ष विधि कहा जाता है क्योंकि यह विचलन लिए बिना सीधे मानों से मानक विचलन की गणना करता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}$$

Example/ **उदाहरण**

➢ Calculate the standard deviation for the following data by direct method ?/निम्नलिखित डेटा के लिए प्रत्यक्ष विधि द्वारा मानक विचलन की गणना करें?

5, 10, 25, 30, 50

X	X^2
5	25
10	100
25	625
30	900
50	2500
120	4150

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

or $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - (\overline{x})^2}$

or, $\sigma = \sqrt{\frac{4150}{5} - (24)^2}$

or, $\sigma = \sqrt{254} = 15.937$

(d) *Step-deviation method*/चरण-विचलन विधि: This method involves the following steps/इस विधि में निम्नलिखित चरण शामिल हैं:

(i) We take any involves the following steps./हम निम्नलिखित कदम उठाते हैं।

(ii) Deviations are taken from the assumed average ad $dx = (X - A)$/अनुमानित औसत विज्ञापन $dx = (X - A)$ से विचलन लिया जाता है

(iii) The deviations are divided by some common factor, as $dx' = \frac{dX}{C}$ where C is the common factor and dx' are as step-deviations./विचलनों को कुछ उभयनिष्ठ कारकों द्वारा विभाजित किया जाता है, क्योंकि $dx' = \frac{dX}{C}$ जहां C उभयनिष्ठ गुणनखंड है और dx' पद-विचलन हैं।

(iv) Sum of the step-deviations is obtained. Also, step-deviations are squared and then sum total is obtained as $\sum dx'^2$ /पद-विचलन का योग प्राप्त होता है। साथ ही, चरण-विचलनों का वर्ग किया जाता है और फिर कुल योग $\sum dx'^2$ के रूप में प्राप्त किया जाता है।

- Now we can calculate the standard deviation by following formula/अब हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा मानक विचलन की गणना कर सकते है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx'^2}{N} - \left(\frac{\sum dx'}{N}\right)^2} \times C$$

Example/ उदाहरण

➢ Calculate the standard deviation for the following data by step deviation method?/चरण विचलन विधि द्वारा निम्न डेटा के लिए मानक विचलन की गणना करें?

5, 10, 25, 30, 50

x	x'	d(x'–x')	d'²
5	1	–3.8	14.44
10	2	–2.8	7.84
25	5	+0.2	0.04
30	6	+1.2	1.44
50	10	+5.2	27.04
		0	50.80

- In the above table,/उपरोक्त तालिका में, $x' = \frac{x}{c}$

  Where c = common factor/जहां c = सामान्य कारक

- First step is to calculate/गणना करने के लिए पहला कदम है $\overline{X} = \frac{1+2+5+6+10}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$

- The following formula is used to calculate standard deviation:/मानक विचलन की गणना के लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है:

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d'^2}{n}} \times c$, $\sigma = \sqrt{\frac{50.80}{5}} \times 5$

$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5$, $\sigma = 15.937$

☞ ***Standard Deviation in Continuous frequency distribution:/सतत आवृत्ति वितरण में मानक विचलन:*** Like ungrouped data, S.D. can be calculated for grouped data by any of the following methods:/असमूहीकृत डेटा की तरह, S.D. निम्न विधियों में से किसी के द्वारा समूहीकृत डेटा के लिए गणना की जा सकती है:

(a) Actual Mean Method/वास्तविक मतलब विधि

(b) Assumed Mean Method/अनुमानित माध्य विधि

(c) Step-Deviation Method/चरण-विचलन विधि

(a) Actual Mean Method/वास्तविक माध्य विधि:

(i) Calculate the mean of the distribution./वितरण के माध्य की गणना करें।

(ii) Calculate deviations of mid-values from the mean/माध्य से मध्य-मानों के विचलन की गणना करें

(iii) Multiply the deviations with their corresponding frequencies to get 'fd' values./'fd' मान प्राप्त करने के लिए विचलनों को उनकी संगत बारंबारताओं से गुणा करें।

(iv) Calculate 'fd^2' values by multiplying 'fd' values with 'd' values./मानों को 'd' मानों से गुणा करके 'fd^2' मानों की गणना करें।

(v) Apply the formula as under/सूत्र को निम्नानुसार लागू करें

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n}}$$

Example/ उदाहरण

➢ Calculate the standard deviation for the following data./निम्नलिखित डेटा के लिए मानक विचलन की गणना करें।

Class intervals	Frequency
10-20	5
20-30	8
30-50	16
50-70	8
70-80	3

Sol./ हल

(1) CI	(2) f	(3) m	(4) fm	(5) d	(6) fd	(7) fd^2
10-20	5	15	75	–22.5	–127.5	3251.25
20-30	8	25	200	–15.5	–124.0	1922.00
30-50	16	40	640	–0.5	–8.0	4.00
50-70	8	60	480	+19.5	+156.0	3042.00
70-80	3	75	225	+34.5	+103.5	3570.75
	40		1620		0	11790.0

$$\overline{X} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{1620}{40} = 40.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{11790}{40}} = 17.168$$

(b) *Assumed Mean Method/*मान लिया गया तरीका: For the same data used in above example find the standard deviation by using assumed mean method ?/उपरोक्त उदाहरण में उपयोग किए गए समान डेटा के लिए कल्पित माध्य विधि का उपयोग करके मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

Example/ उदाहरण

➢

(1) CI	(2) f	(3) m	(4) d	(5) fd	(6) fd²
10-20	5	15	–25	–125	3251
20-30	8	25	–15	–120	1800
30-50	16	40	0	0	0
50-70	8	60	+20	160	3200
70-80	3	75	+35	105	3675
	40			+20	11800

☞ **The following steps are required/निम्नलिखित चरणों की आवश्यकता है:**

1. Calculate mid-points of classes/वर्गों के मध्य-बिंदुओं की गणना करें
2. Calculate deviations of mid-points from an assumed mean such that d = m – A –(Col. 4). Assumed Mean = 40./एक कल्पित माध्य से मध्य-बिंदुओं के विचलन की गणना करें जैसे कि d = m – A –(Col. 4). मान लिया गया मतलब = 40.
3. Multiply values of 'd' with corresponding frequencies to get 'fd' values./'fd' मान प्राप्त करने के लिए 'd' के मानों को संगत बारंबारता से गुणा करें।
4. Multiply 'fd' values/'fd' मूल्यों को गुणा करें।
5. Standard Deviation can be calculated by the following formula./मानक विचलन की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जा सकती है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd^2}{n}\right)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{11800}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2}$$

or, $\sigma = \sqrt{294.75} = 17.168$

(c) Step-deviation Method/चरण-विचलन विधि:

Example/ उदाहरण

➢ For the same data used in above example find the standard deviation by using assumed mean method ?/ उपरोक्त उदाहरण में उपयोग किए गए समान डेटा के लिए कल्पित माध्य विधि का उपयोग करके मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

(1) CI	(2) f	(3) m	(4) fm	(5) d'	(6) fd'	(7) fd²
10-20	5	15	–25	–5	–25	125
20-30	8	25	–15	–3	–24	72
30-50	16	40	0	–0	0	0
50-70	8	60	+20	+4	+32	128
70-80	3	75	+35	+7	+21	147
	40				+4	472

➢ In case the values of deviations are divisible by a common factor, the calculations can be simplified by the step-deviation method as in the following example./ यदि विचलन के मान एक सामान्य कारक से विभाज्य हैं, तो निम्न उदाहरण की तरह चरण-विचलन विधि द्वारा गणना को सरल बनाया जा सकता है।

Steps Required/आवश्यक कदम

- Calculate class mid-points (Col. 3) and deviations from an arbitrarily chosen value, just like in the assumed mean method. In this example, deviations have been taken from the value 40. (Col. 4)./वर्ग के मध्य-बिंदु (Col. 3) और मनमाने ढंग से चुने गए मान से विचलन की गणना करें, ठीक उसी तरह जैसे कल्पित माध्य विधि में किया जाता है। इस उदाहरण में, मान 40 से विचलन लिया गया है। (Col. 4)
- Divide the deviations by a common factor denoted as 'c'. c = 5 in the above example. The values so/ विचलन को 'c' के रूप में निरूपित एक सामान्य कारक द्वारा विभाजित करें। c = 5 उपरोक्त उदाहरण में। मान तो
- Multiply 'd'' values with corresponding 'f'' values./'d'' मूल्यों को संबंधित 'f' मूल्यों के साथ गुणा करें।
- Multiply 'fd'' values with 'd'' values to get 'fd'²' values/'fd'' मान को 'd'' मान से गुणा करके 'fd'²' मान प्राप्त करें।
- Sum up values in Col. 6 and Col. 7 to get $\sum fd'$ and $\sum fd'^2$ values,/मूल्यों का योग करें।
- Apply the following formula./निम्नलिखित सूत्र को लागू करें।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times C$$

or $\sigma = \sqrt{\frac{472}{40} - \left(\frac{4}{40}\right)^2} \times 5$

or $\sigma = \sqrt{11.8 - 0.01} \times 5$

or $\sigma = \sqrt{11.79} \times 5$

$\sigma = 17.168$

Weighted Arithmetic Mean/भारित अंकगणितीय माध्य

- We have so far discussed Simple Arithemtic Mean. In simple arithmetic mean, all items of a series are taken as of equal significance, But sometimes we may give greater significance to some items and less to others. An household may, for example, give more significance to food, less to clothes and still less to entertainment. When different items of series are weighed according to their relative importance, the average of such series is called Weighted Arithmetic Average. A Weighted Arithmetic Average is, thus, the mean of weighted items./अभी तक हमने सरल समांतर माध्य की चर्चा की है। साधारण अंकगणितीय माध्य में, एक श्रृंखला की सभी वस्तुओं को समान महत्व के रूप में लिया जाता है, लेकिन कभी-कभी हम कुछ वस्तुओं को अधिक महत्व दे सकते हैं और अन्य को कम। उदाहरण के लिए, एक परिवार भोजन को अधिक, कपड़ों को कम और मनोरंजन को कम महत्व देता है। जब श्रृंखला की विभिन्न मदों को उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार तौला जाता है, तो ऐसी श्रृंखला के औसत को भारित अंकगणितीय औसत कहा जाता है। एक भारित अंकगणितीय औसत, इस प्रकार, भारित मदों का माध्य है।

Calculation of Weighted Mean/भारित माध्य की गणना

- Calculation of weighted mean involves the following steps:/भारित माध्य की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल हैं:
  - (i) Different items are weighed according to their significance. /विभिन्न वस्तुओं को उनके महत्व के अनुसार तौला जाता है।

    Weights are indicated by 'W'./वजन 'W' द्वारा दर्शाया गया है।
  - (ii) Items (X) are multiplied by their corresponding weights (W) and added up to get $\sum WX$./आइटम (X) को उनके संबंधित वजन (W) से गुणा किया जाता है और प्राप्त करने के लिए जोड़ा जाता है।
  - (iii) $\sum WX$ is divided by the sum total of weights, i.e., $\sum W$,to get the mean value, that is,/भार के कुल योग से विभाजित किया जाता है, अर्थात, औसत मान प्राप्त करने के लिए, अर्थात,

Formula/सूत्र: $\overline{X}_W = \frac{\sum WX}{\sum W}$

Here, $\overline{X}_W$ indicates weighted average./यहाँ, $\overline{X}_W$ भारित औसत इंगित करता है।

Example/ उदाहरण

- Calculate weighted mean of the following data:/ निम्नलिखित डेटा के भारित माध्य की गणना करें:

Marks (X)	81	76	74	58	70	73
Weight (W)	2	3	6	7	3	7

Sol./ हल

- Calculation of Weighted Mean/भारित माध्य की गणना

Marks (X)	Weight (W)	WX
81	2	162
76	3	228
74	6	444
58	7	406
70	3	210
73	7	511
	$\sum W = 28$	$\sum WX = 1961$

Weighted Mean,/भारित माध्य,

$$\overline{X}_W = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{1961}{28} = 70.04$$

Example/ उदाहरण

- The following table shows prices per 100g of tea of different brands. Using quantities as weight, find out weighted arithmetic mean of the prices.

निम्न तालिका विभिन्न ब्रांडों की प्रति 100 ग्राम चाय की कीमतों को दर्शाती है। मात्राओं को भार के रूप में प्रयोग करते हुए कीमतों का भारित अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

Price per 100g in Rs.	2.50	3	3.50	4	4.25	5
Quantity	10	8	8	4	4	2

Sol./ हल

Price (X)	Quantity(W)	(WX)
2.50	10	25
3	8	24
3.50	8	28
4	4	16
4.25	4	17
5	2	10
	$\sum W = 36$	$\sum WX = 120$

$$\overline{X}_W = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{120}{36} = \frac{10}{3} = 3.333$$

NUMBER SYSTEM
संख्या पद्धति

CHAPTER 20

- *Digits:* A digit is a single symbol used to make numericals/numbers (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 are digits)
  अंक: अंक एक एकल प्रतीक है जिसका उपयोग संख्यात्मक/संख्या बनाने के लिए किया जाता है (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 अंक हैं)
- **Unit digit (इकाई का अंक)**
- The last digit of a number is called the unit digit./किसी संख्या का अंतिम अंक, इकाई अंक कहलाता है। 1234

  ↓ इकाई का अंक

- The unit's digit of a number depends on the resultant value of all the given numbers.
  किसी संख्या का इकाई का अंक सभी दी गयी संख्याओं के परिणामी मान पर निर्भर करता है।

Ex. (i) 23 + 24 + 25 + 46 + 78 = 196

It is clear that the unit's digit of the number 196 depends on the resultant value of 3, 4, 5, 6, 8.

यह स्पष्ट होता है कि संख्या 196 के इकाई का अंक 3, 4, 5, 6, 8 के परिणामी मान पर निर्भर है। So, 3 + 4 + 5 + 6 + 8 = 26

unit digit/इकाई अंक = 6

(ii) 31 × 33 × 37 × 39 × 43

इकाई अंको का गुणनफल

= 1× 3 × 7 × 9 × 3 = ...7

इकाई का अंक

Note:-

1. The unit digit of the product of all odd prime numbers is 5./सभी विषम अभाज्य संख्याओं के गुणनफल का इकाई अंक 5 प्राप्त होता है।
2. The unit digit of the product of all prime numbers will be zero because it will be multiplied once (2 × 5)./सभी अभाज्य संख्याओं के गुणनफल का इकाई अंक शून्य प्राप्त होगा क्योंकि इसमें एक बार (2 × 5) का गुणा होगा।
3. 5! And (greater than 5!) the unit's digit returns 0./5! और (5! से अधिक) इकाई का अंक 0 देता है।

	इकाई का अंक
1!	1
2!	2
3!	6
4!	4

5! and 5! more than 0

5! और 5! से अधिक 0

Unit's digit, when N is raised to a power/इकाई का अंक, जब N किसी घात में लगा हो–

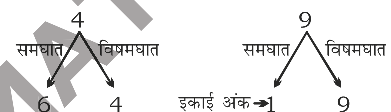
Rule-1:- If 0, 1, 5 and 6 are any power (even or odd) of the unit digit, then there will be no change in the unit digit./यदि 0, 1, 5 और 6 इकाई के अंको की कोई भी घात (सम या विषम) हो तो इकाई अंक में कोई भी परिवर्तन नहीं होगा।

Ex:- (i) $(376\mathbf{5})^{437}$, unit digit/इकाई का अंक = 5

(ii) $(673\mathbf{6})^{32567}$, unit digit/इकाई का अंक = 6

(iii) $(3254\mathbf{1})^{325}$, unit digit/इकाई का अंक =1

Rule-2:- 4 और 9



Note:- $(\text{odd})^{\text{even/odd}} \rightarrow$ unit digit is odd $(\text{even})^{\text{even/odd}} \rightarrow$ unit digit is even

even × even → digit of the unit will be even./सम × सम → इकाई का अंक सम होगा।

odd × odd → odd/विषम × विषम → विषम

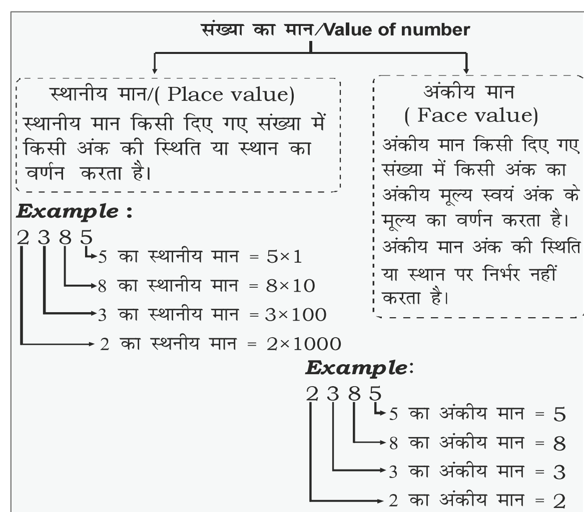
even × odd → even/सम × विषम → सम

odd ± odd → even/विषम ± विषम → सम

odd ± even → odd/विषम ± सम → विषम

even ± odd → odd/सम ± विषम → विषम

- How to find the unit's digit after squaring, cube etc. of any number:- To find the unit's digit always the last digit of the number is taken./किसी भी संख्या का वर्ग, घन आदि करने पर इकाई का अंक कैसे ज्ञात करें:–इकाई का अंक ज्ञात करने के लिए हमेशा संख्या का आखिरी अंक लिया जाता है।



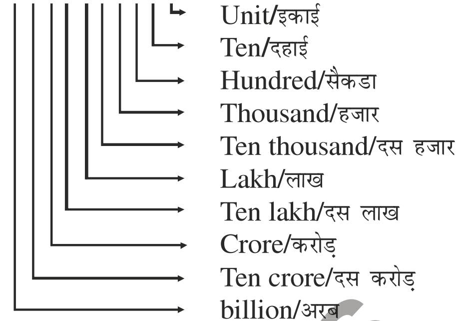
2143576892 अंतर्राष्ट्रीय पद्धति	भारतीय पद्धति
2×1 = 2 (इकाई)	इकाई
9×10 = 90(दहाई)	दहाई
8×100 = 800 (सैकड़ा)	सैकड़ा
6×1000 = 6,000 (हजार)	हजार
7×10000 = 70,000 (दस हजार)	दस हजार
5×100000 = 500,000 (सौ हजार)	लाख
3×1000000 = 3,000,000 (मिलियन)	दस लाख
4×0000000 = 40,000,000 (दस मिलियन)	करोड़
1×00000000= 100,000,000 (सौ मिलियन)	दस करोड़
2×00000000 = 2,000,000,000 (विलियन)	अरब

- The meaning of both these words numerical value and face value is the same./अंकीय मान एवं जातीय मान इन दोनों शब्दों का अर्थ एक ही है।
- How to identify units, tens, hundreds, thousands?/ इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार... की पहचान कैसे करें?
- While counting numbers, we proceed in the order of one, ten, hundred, thousand, ten thousand, lakh, ten lakh, crore, ten crores from the right side to the left side. Let's go.
  संख्याओं को गिनते समय हम दायीं तरफ से बायीं तरफ की ओर इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दस हजार, लाख, दसलाख, करोड़, दस करोड़........ के क्रम में आगे बढ़ते हैं।

Example:/*उदाहरण :*

- Unit 1 (Unit digit is single like 3, 5, 2, 4)/इकाई 1 (इकाई अंक अकेला ही होता है जैसे 3, 5, 2, 4)
- Tens 10 (Tens have 2 digits like 23, 35, 99, 89)/ दहाई 10 (दहाई में 2 अंक होते है जैसे 23, 35, 99, 89)
- Hundredth 100 (hundredth has 3 digits like 121, 135, 199)/सैकड़ा 100 (सैकड़ा में 3 अंक होते है जैसे 121, 135, 199)
- Thousand 1000 (Thousand has 4 digits like 2345, 8969, 1010)/हजार 1000 (हजार में 4 अंक होते है जैसे 2345, 8969, 1010)
- Ten Thousand 10000 (Ten Thousand has 5 digits like 23561, 25691)/दस हजार 10,000 (दस हजार में 5 अंक होते है जैसे 23561, 25691)
- Lakh 100000 (Lakh has 6 digits like 201542, 330152, 999910)/लाख 1,00,000 (लाख में 6 अंक होते है जैसे 201542, 330152, 999910)
- Ten Lakh 10,00,000 (Ten Lakh has 7 digits like 2356897, 9235456)/दस लाख 10,00,000 (दस लाख में 7 अंक होते है जैसे 2356897, 9235456)
- Crore 1,00,00,000 (Crore has 8 digits like 12986128, 13984527)/करोड़ 1,00,00,000 (करोड़ में 8 अंक होते है जैसे 12986128, 13984527)

Ex: 2143576892

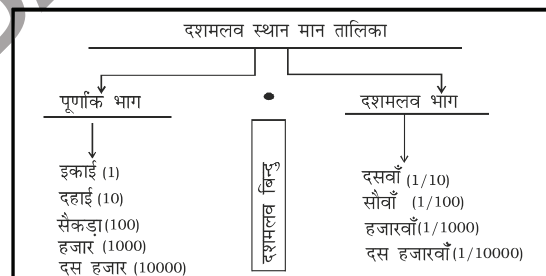


Unit digit/इकाई अंक: The unit digit of a number is the digit in the units place of the number. This is the last digit of the number./किसी संख्या का इकाई अंक संख्या के इकाई स्थान का अंक होता है। यह संख्या का सबसे अंतिम अंक होता है।

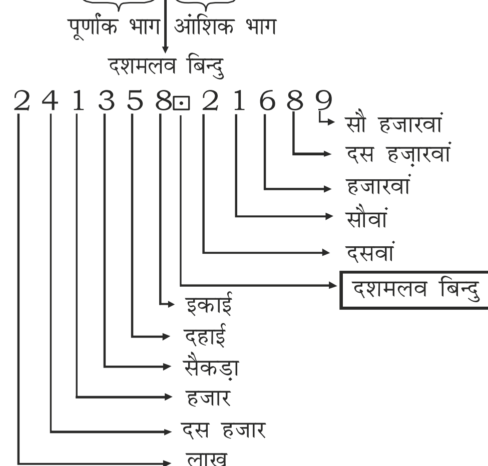
Ex. *The unit digit of the number 421 is 1.*/421 संख्या का इकाई अंक 1 है।

Unit digit of a decimal number
दशमलव संख्या का इकाई अंक

A decimal number consists of a whole number and a fractional part, separated by a decimal point./एक दशमलव संख्या में एक पूर्ण संख्या और एक भिन्नात्मक भाग होता है, जिसे एक दशमलव बिंदु से अलग किया जाता है।

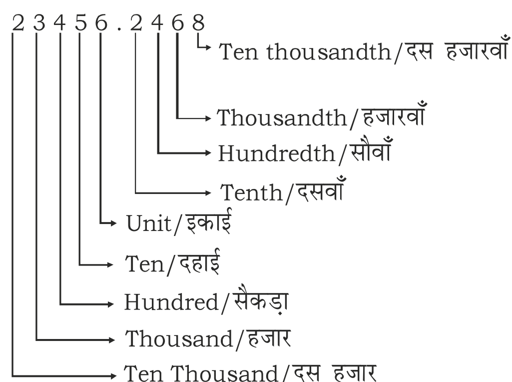


Ex– 241358.21689
पूर्णांक भाग | आंशिक भाग
दशमलव बिन्दु



Place value of a decimal number/दशमलव संख्या का स्थानीय मान

Ex: How to write the place value of the number 23456.2468?/संख्या 23456.2468 का स्थानीय मान कैसे लिखें?



8's place value = $8\times\frac{1}{10000}=0.0008$ (ten thousandth)/

8 की जगह की मूल्य = $8\times\frac{1}{10000}=0.0008$ (दस हजारवाँ)

6's place value = $6\times\frac{1}{1000}=0.006$ (thousandth)/ 6 की

जगह की मूल्य = $6\times\frac{1}{1000}=0.006$ (हजारवाँ)

4's place value = (hundredths)/4 की जगह की मूल्य

= $4\times\frac{1}{100}=0.04$ (सौवाँ)

2's place value = $2\times\frac{1}{10}=0.2$ (tenth)/2 की जगह

की मूल्य = $2\times\frac{1}{10}=0.2$ (दसवाँ)

place value of 6 = 1 × 6 = 6 (unit)/6 की जगह की मूल्य

= $6\times1=6$ (इकाई)

5's place value =5 × 10 = 50 (ten's)/5 की जगह की मूल्य

= $5\times10=50$ (दहाई)

4's place value = $4\times100=400$ (hundreds)/4 की जगह की मूल्य = $4\times100=400$ (सैकड़ा)

3's place value = $3\times1000=3000$ (thousand)/3 की जगह की मूल्य = $3\times1000=3000$ (हजार)

2's place value= $2\times10000=20,000$ (ten thousand) /2 की जगह की मूल्य = $2\times10000=20,000$ (दस हजार)

There are mainly two types of questions in unit marks/इकाई अंक में मुख्य रूप से 2 प्रकार के प्रश्न बनते हैं–

I^{st} प्रकार — x^n



Addition, subtraction, multiply, exponential form factorial and mixed by solving questions Finding the unit digit. /जोड़ना, घटाना, गुणा करना, घात करना, घातीय रूप, फैक्टोरियल और मिश्रित वाले प्रश्नों को हल करके इकाई अंक ज्ञात करना।

II^{nd} प्रकार — $[XO]^n$



Find rightmost non zero numbers like- सबसे दायां गैरशून्य अंक ज्ञात करना जैसे– $(X0)^n$= _000

- Total number of digits by squaring of any number:-/किसी भी संख्या का वर्ग करके अंकों की कुल संख्या:-

$(1\rightarrow3)^2\rightarrow$ one digit/एक अंक

$(4\rightarrow9)^2\rightarrow$ two digits/दो अंक

$(10\rightarrow31)^2\rightarrow$ three digits/तीन अंक

- Total number of digits by cubing of any number:-/किसी भी संख्या का घन करके अंकों की कुल संख्या:-

$(1,2)^3\rightarrow$ one digit/एक अंक

$(3,4)^3\rightarrow$ two digits/दो अंक

$(5\rightarrow9)^3\rightarrow$ three digits/तीन अंक

$(10\rightarrow21)^3\rightarrow$ four digits/चार अंक

$(22\rightarrow46)^3\rightarrow$ five digits/पाँच अंक

$(47\rightarrow99)^3\rightarrow$ six digits/छः अंक

Concepts of 2, 3, 7, 8

When a number is of the form (....2^n, 3^n, 7^n, 8^n) then there is no shortcut to solve it by cyclicity./जब कोई संख्या (....2^n, 3^n, 7^n, 8^n) रूप की हो तो इसका कोई शॉर्टकट नहीं है इसे साइक्लिसिटी से हल करते हैं।

घात →

इकाई अंक ↓	1 or 4n+1	2 or 4n+2	3 or 4n+3	4 or 4n+4
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6

Here we see that the unit digit starts repeating after the 4th power, so in the case of 2a3a7a8 the cyclicity is 4./यहाँ हम देखते है कि 4 घात के बाद इकाई अंक की पुनरावृत्ति होने लगता है अत: 2,3,7,8 की स्थिति में साइक्लिसिटी 4 होती है।

इकाई अंक ↓ / घात →	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	0	साइक्लिसिटी ⟶ 1
1	1	1	1	1	1	1	साइक्लिसिटी ⟶ 1
2	2	4	8	6	2	4	साइक्लिसिटी ⟶ 4
3	3	9	7	1	3	9	साइक्लिसिटी ⟶ 4
4	4	6	4	6	4	6	साइक्लिसिटी ⟶ 2
5	5	5	5	5	5	5	साइक्लिसिटी ⟶ 1
6	6	6	6	6	6	6	साइक्लिसिटी ⟶ 1
7	7	9	3	1	7	9	साइक्लिसिटी ⟶ 4
8	8	4	2	6	8	4	साइक्लिसिटी ⟶ 4
9	9	1	9	1	9	1	साइक्लिसिटी ⟶ 2

Note:- The cyclicity of the digits 0,1,5,6 is 1./अंक 0,1,5,6 की साइक्लिसिटी 1 होती है

The cyclicity of the numbers 2,3,7,8 is 4./अंक 2,3,7,8 की साइक्लिसिटी 4 होती है।

The cyclicity of the numbers 4,9 is 2./अंक 4,9 की साइक्लिसिटी 2 होती हैं।

So we can say that the cyclicity of all numbers is 4. Because the number which is repeated after power 1 will also repeat after power 4 and the number which is repeated after power 2 will also repeat after power 4./अत: हम कह सकते हैं कि सभी संख्या की साइक्लिसिटी 4 होती हैं। क्योंकि जो संख्या घात 1 के बाद रिपीट हुआ है वो घात 4 के बाद भी रिपीट होगा तथा जो संख्या घात 2 के बाद रिपीट हुआ है वो घात 4 के बाद भी रिपीट होगा।

Cyclicity is always used to reduce power./साइक्लिसिटी का उपयोग हमेशा घात छोटी करने में होता हैं।

Counting of digits/अंकों की गिनती:-

Total digits from 1 to 9/1 से 9 तक कुल अंक

9N × 1 digit = 9 digit

Ex. 10 to 79 $\rightarrow$ 70 numbers

70×2

140+9

149 digits

Note:/नोट:

$1 \rightarrow 9 \Rightarrow 9$ N $\Rightarrow 9$ Digits/अंक

$1 \rightarrow 99 \Rightarrow 99$ N $\Rightarrow 189$ Digits/अंक

$1 \rightarrow 999 \Rightarrow 999$ N $\Rightarrow 2889$ Digits/अंक

$1 \rightarrow 9999 \Rightarrow 9999$ N $\Rightarrow 38889$ Digits/अंक

$1 \rightarrow 99999 \Rightarrow 99999$ N $\Rightarrow 488889$ Digits/अंक

Find the number of digits in the square root of any number:-/किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए:-

First, we have to determine that the total no. of digits in the given no. is odd or even.

सबसे पहले, हमें यह निर्धारित करना होगा कि संख्या में अंकों की संख्या सम है या विषम।

If the number of digit is even then N = $\frac{n}{2}$

यदि अंकों की संख्या सम है तो N = $\frac{n}{2}$

If the number of digit is odd then N = $\frac{n+1}{2}$

यदि अंकों की संख्या विषम है तो N = $\frac{n+1}{2}$

N $\rightarrow$ Number of digits after square root

Note:- If a number is divided by 10, the remainder is the unit digit of the number.

यदि किसी संख्या में 10 से भाग दिया जाए तो प्राप्त शेषफल, संख्या का इकाई अंक होता है।

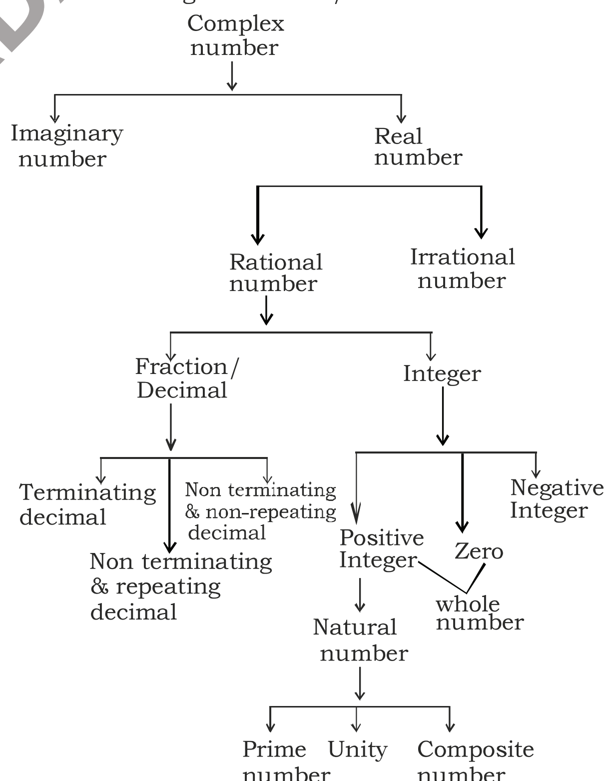
➢ If a number is divided by 100, the remainder is the last two digits of the number./यदि किसी संख्या में 100 से भाग दिया जाए तो प्राप्त शेषफल, संख्या के अंतिम दो अंक होते है।

Numbers/संख्याएँ: A number is arrange ment/group of digits

एक संख्या अंकों की व्यवस्था/समूह है

749 → number is one/संख्या एक हैं

749 → digits are three/अंक तीन हैं



Complex numbers/ सम्मिश्र संख्या: The number which are expressed in the form of a + ib is called complex number (where, a and b are real number, *i* is an imaginary number its called iota)/वे संख्याएँ जिन्हें a + ib के रूप में व्यक्त किया जाता है, सम्मिश्र संख्याएँ कहलाती हैं जहाँ, a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, i एक काल्पनिक संख्या है जिसे iota कहा जाता है

- *Real number/ वास्तविक संख्या:* The number which can be represented on number line./वह संख्या जिसे संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है।

$(-\infty, -\frac{9}{2}, 7, -5, \infty$, etc)

Imaginary number/ काल्पनिक संख्या: The number which can not be represented on number line/वह संख्या जिसे संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है

$(\sqrt{-25}, \sqrt{-1} = i, \sqrt{3i})$

Rational numbers/ परिमेय संख्याएं:- The numbers which can be represented in $\frac{p}{q}$ format (where, p and q are integers and $q \neq 0$)

वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में दर्शाया जा सकता है

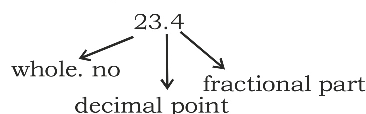
(जहां, p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$)

$\left(-1.5, 1, 0.6, \sqrt{49}, \frac{22}{7}, 0.\bar{9}\right)$

Irrational numbers/ अपरिमेय संख्याएं: The number which can not be represented in $\frac{p}{q}$ format./वे संख्याएं जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e^n, $\sqrt{4343}$

Fraction: A fraction is numerical value that is a part of whole./**भिन्न:** भिन्न एक संख्यात्मक मान है जो पूर्ण का एक हिस्सा है। $\left(\frac{7}{9}, \frac{1}{2}, \frac{9}{11}\right)$

Decimals:/दशमलव: The numbers which have a whole number and the fractional part separated by a decimal point, is called decimal numbers./वे संख्याएँ जिनमें एक पूर्ण संख्या होती है और भिन्नात्मक भाग एक दशमलव बिंदु द्वारा अलग किया जाता है, दशमलव संख्याएँ कहलाती हैं।



Integers:/पूर्णांक: It is a set of numbers comprising zero, positive and negative numbers/यह संख्याओं का एक समूह है जिसमें शून्य, धनात्मक और ऋणात्मक संख्याएँ होती हैं

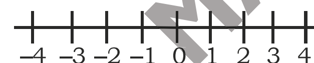
$(-8, -7, 0, 7, 8, \infty)$

Positive integers/धनात्मक पूर्णांक: The positive integers are 1,2,3.... sometimes called the counting numbers or natural numbers (any numbers greater than 0 is called positive integers)

$(1, 2, 3, 4, 9, 512, ... \infty)$

धनात्मक पूर्णांक 1,2,3.... होते हैं जिन्हें कभी-कभी गिनती की संख्या या प्राकृतिक संख्या कहा जाता है (0 से बड़ी कोई भी संख्या धनात्मक पूर्णांक कहलाती है)

Negative integers/ऋणात्मक पूर्णांक: A negative integer is an integer to the left side of zero on the number line. It is less than zero./एक ऋणात्मक पूर्णांक, संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर एक पूर्णांक हो



Zero/शून्य:- It is neither positive nor negative/यह न तो धनात्मक होता है और न ही ऋणात्मक

- *Whole number/ पूर्ण संख्याएं:-* set of positive integers and zero is called whole number $(0, 1, 2, 3..... \infty)$/धनात्मक पूर्णांकों और शून्य के समुच्चय को पूर्ण संख्या कहते हैं
- *Natural number(प्राकृतिक संख्याएें):-* Set of positive integers is called natural no./धनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय को प्राकृतिक संख्या कहते हैं।
  $(0, 1, 2, 3..... \infty)$
- *Even number/ सम संख्या:-* The numbers which can be completely divided by 2, is called even number जिन संख्याओं को 2 से पूर्णतया विभाजित किया जा सकता है, उन्हें सम संख्या कहते हैं (–8, –2, 0, 6, 8, 4) etc.
- *Odd number/ विषम संख्या:* The numbers which can not be divided by 2 is called odd number/वह संख्या जो 2 से विभाजित न हो सके विषम संख्या कहलाती है (–13, –9, 3, 15) etc.
- *Prime numbers/ अभाज्य संख्याएँ:* The numbers which have only two different factors. (one factor is '1' and the other factor is the number itself)/वे संख्याएँ जिनके केवल दो अलग-अलग गुणनखंड होते हैं। (एक गुणनखंड '1' है और दूसरा गुणनखण्ड स्वयं संख्या है) (2, 3, 5, 7)

  1 ⇒ It is neither prime number nor composite number /यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या

- *Composite number/ भाज्य संख्या:*-(the numbers which have more than two different factors) /(वे संख्याएँ जिनके दो से अधिाक विभिन्न गुणनखंड हैं) (4, 6, 9, 15)
- *Twin prime number/ जुड़वां अभाज्य संख्या:* Two consecutive prime numbers whose difference is 2./(3, 5) (11, 13), (5, 7) दो लगातार अभाज्य संख्याएँ जिनका अंतर 2 है।
- *Co-prime/ relative prime number/ सह-अभाज्य/सापेक्ष अभाज्य संख्या:*- Two natural number whose HCF is 1
  (16, 9) (6, 7) (11, 13)
- How to know a number is prime or not.
  कैसे पता करें कि कोई संख्या अभाज्य है या नहीं।

  Ex.119

  119 से बड़ा पूर्ण वर्ग 121 $\Rightarrow$ 11 का वर्ग, 11 से छोटे सभी अभाज्य संख्या से भाग करके 119 को check करले।

  (2, 3, 5, 7)

  719 $\rightarrow$ 729 $\rightarrow$ 27

  $\downarrow$

  (2,3,5,7,11,13,17,19,23)

  Note:- Except (2 & 3), All prime numbers are always in the form of $6x \pm 1$
  (But, it is not necessary that a number is in the form of $6x \pm 1$ will always be a prime number)./(2 और 3) को छोड़कर, सभी अभाज्य संख्याएँ हमेशा $6x \pm 1$ के रूप में होती हैं

  Ex: 7 $\rightarrow 6x + 1$

  put $x = 1$

  $6 \times 1 + 1 \rightarrow 7$
- The First & only even prime number is 2./पहली और एकमात्र सम अभाज्य संख्या 2 है
- 101 is the first three digit prime number
- Upto 100 $\rightarrow$ only "eight pairs" of twin prime number/100 तक जुड़वा अभाज्य संख्याओं के केवल ''आठ जोड़े'' होते है
- Upto 100 $\rightarrow$ prime number is 25/100 तक कुल अभाज्य संख्या 25

  1 – 50 तक $\rightarrow$ 15

  51 – 100 तक $\rightarrow$ 10

  Terminating decimal: $\frac{1}{2} \rightarrow (0.5)$ $\boxed{\frac{N}{2^n \text{or} 5^n \text{or} (2 \times 5)^n}}$

  Non-terminating & repeating decimal: $\frac{3}{9} \rightarrow .3333..... \rightarrow \overline{3}$

  Non-terminating & non repeating decimal

  $\sqrt{2} \rightarrow 1.414$/गैर-समाप्ति और गैर-दोहराव दशमलव

Note:/नोट: All repeating decimals are rational number but all rational numbers are not repeating decimal/सभी आवर्ती दशमलव, परिमेय संख्याएँ हैं लेकिन सभी परिमेय संख्याएँ, आवर्ती दशमलव नहीं हैं

- All non-recurring decimal are irrational number and also all irrational number are non-recurring decimals
  सभी अनावर्ती दशमलव, अपरिमेय संख्याएँ हैं और साथ ही सभी अपरिमेय संख्याएँ, अनावर्ती दशमलव हैं
  - π is a non repeating & non-terminating irrational number/ π एक और गैर-समाप्ति अपरिमेय संख्या है
  - Every integer is a rational number./प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।
  - Every rational number is a real number./प्रत्येक परिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।
  - The sum of two irrational numbers may be rational or irrational number./दो अपरिमेय संख्याओं का योग परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकता है।
  - If x is positive even interger and y is odd negative integer then x^y is a rational number./यदि x धनात्मक सम पूर्णांक है और y विषम ऋणात्मक पूर्णांक है तो x^y एक परिमेय संख्या है।
  - If x and y are natural numbers, then $\sqrt[m]{n}$ is an irrational number./यदि x और y प्राकृतिक संख्याएँ हैं, तो $\sqrt[m]{n}$ एक अपरिमेय संख्या है।

    (Unless n is the m^{th} power of an integer.)/(जब तक n किसी पूर्णांक की m^{th} घात न हो।)
  - If x is a rational number then $\sqrt{x}$ may either be a natural number or an irrational number./यदि x एक परिमेय संख्या है तब $\sqrt{x}$ या तो एक प्राकृत संख्या या एक अपरिमेय संख्या हो सकती है।
  - The product of a rational number and an irrational number may either be a rational number or irrational number./एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या तो एक परिमेय संख्या या अपरिमेय संख्या हो सकता है।

- **Perfect number/पूर्ण संख्याएं:-**

  The sum of all the factors of a number is twice the number itself, or the sum of the reciprocals of the factors of these numbers is always 2./जिस संख्या के सभी गुणनखण्डों का योग, संख्या से दोगुना हो, या इन संख्याओं के गुणनखण्डों के व्युत्क्रमों का योगफल हमेशा 2 होता है।

  ex:- 6, 28, 496, 8128

Digital Sum:-

It is just a position of remainder when it is divided by 9./यह केवल शेषफल की स्थिति है जब इसे 9 से विभाजित किया जाता है।

9 × any no. = digital sum (9)

9 × 37 = 333 $\rightarrow$ (9)

$\frac{7683215}{9}$ R = (5)

Note:-

- Cut all digits whose sum is 9./उन सभी अंकों को काट दें जिनका योग 9 है।
- Digital sum of a perfect square number is 0/9 , 1, 4, 7 एक पूर्ण वर्ग संख्या का डिजिटल योग 0/9, 1, 4, 7 है
- To calculate digital sum in fraction number, then always make digital sum 1 in Denominator/अंश संख्या में डिजिटल योग की गणना करने के लिए, हमेशा डिनोमिनेटर में डिजिटल योग 1 बनाएं

Denominator	**4**	**7**	**5**	**2**	**8**
Then multiply by	**7**	**4**	**2**	**5**	**8**

Note: We can't use digital sum in this type of format./**नोट:** इस प्रकार के प्रारूप में हम डिजिटल राशि का उपयोग नहीं कर सकते हैं। $\frac{N}{3,6,9}$

Divisibility rule (विभाज्यता के नियम):

1 $\rightarrow$ It can divide all numbers but it cannot be divided by any number (except 1)./यह सभी संख्या को भाग कर सकता है but इसे (1 को छोड़कर) कोई भाग नही कर सकता।

$2^1 \rightarrow 2$, Last 1 digit if divides by 2 then the number also divisible by 2/अंतिम 1 अंक यदि 2 से विभाजित होता है तो संख्या भी 2 से विभाज्य होती है

$2^2 \rightarrow 4$, Last 2 digits if divides by 4/अंतिम 2 अंक यदि 4 से विभाजित होता है

$2^3 \rightarrow 8$, Last 3 digits if divides by 8/अंतिम 3 अंक यदि 8 से विभाजित होता है

$2^4 \rightarrow 16$, Last 4 digits if divides by 16/अंतिम 4 अंक यदि 16 से विभाजित होता है

$2^5 \rightarrow 32$, Last 5 digits if divides by 32/अंतिम 5 अंक यदि 32 से विभाजित होता है

$2^6 \rightarrow 64$, Last 6 digits if divides by 64/अंतिम 6 अंक यदि 64 से विभाजित होता है

$2^7 \rightarrow 128$, Last 7 digits if divides by 128/अंतिम 7 अंक यदि 128 से विभाजित होता है

$2^n \rightarrow$ Last n digit if divides by 2^n/अंतिम n अंक यदि 2^n से विभाजित होता है

Divisibility of 3./3 की विभाज्यता।

If sum of all digits if divisible by 3, then number will also be divisible by 3/यदि सभी अंकों का योग 3 से विभाज्य हो तो संख्या भी 3 से विभाज्य होगी

Divisibility of 9:/9 की विभाज्यता।

If sum of all digits is divisible by 9, number will also be divisible by 9/यदि सभी अंकों का योग 9 से विभाज्य है, तो संख्या भी 9 से विभाज्य होगी।

$5^1 \rightarrow 5$, Last digit is 0 or 5 of a number then the number is divisible by 5/$5^1 \rightarrow 5$, यदि किसी संख्या का अंतिम अंक 0 या 5 है तो 5 से विभाजित होगा।

$5^2 \rightarrow 25$, Last 2 digits if divides by 25/अंतिम 2 अंक यदि 25 से विभाजित करते हैं

$5^3 \rightarrow 125$, Last 3 digits if divides by 125/अंतिम 3 अंक यदि 3 से विभाजित करते हैं

$5^4 \rightarrow 625$, Last 4 digits if divides by 625/अंतिम 4 अंक यदि 625 से विभाजित करते हैं

$5^5 \rightarrow 3125$, Last 5 digits if divides by 3125/अंतिम 5 अंक यदि 3125 से विभाजित करते हैं

$5^n \rightarrow$ Last n digit if divides by 5^n/अंतिम n अंक यदि 5^n से विभाजित करते हैं

6 $\rightarrow$ To be divisible by 6, it must be divisible by both 3 and 2./6 से विभाज्य के लिए 3 एवं 2 दोनों से भाग होना जरूरी है।

7 $\rightarrow$ On dividing directly or multiplying last digit by 2 and subtracted by remaining digit/7 $\rightarrow$ direct भाग करे या आखिरी अंक को 2 से गुणा करके शेष अंकों से घटा दें।

Ex:-343 (आखिरी अंक) 3 $\rightarrow$ 3×2=6 $\rightarrow$ 34–6 $\rightarrow$ 28÷7

A number divisible by both 10 $\rightarrow$ (5 and 2) must be divisible by 10./10 $\rightarrow$ (5 एवं 2) दोनों से विभाज्य संख्या 10 से अवश्य विभाजित होगा।

11 $\rightarrow$ If the difference of the sum of the alternate digits of a number is divisible by 11, then the number is divisible by 11./11 $\rightarrow$ यदि किसी संख्या के एकांतर अंकों के योग का अंतर 11 से भाज्य है तो वह संख्या 11 से भाज्य होगा

उदाहरण:- 539 $\rightarrow$ 14 – 3 $\rightarrow$ 11

By making pairs of 13 numbers (---/---) three each, if their ratio is divisible by 13, then that number will also be divisible by 13./13 $\rightarrow$ संख्या के (---/---) तीन-तीन के जोड़े बनाकर उनका difference अगर 13 से भाग होगा तो वह संख्या भी 13 से भाग होगी।

Special numbers:

101 $\rightarrow$ All numbers written in the form of abab will be divisible by 101 and numbers other than this format are also divisible by 101./101 $\rightarrow$ abab के रूप में लिखी सभी संख्या 101 से भाग होगी और इस प्रारूप के अलावा भी संख्याएं 101 से भाग होती है।

Combined divisibility rule:- 1001 → All numbers written in the form of abcabc will be divisible by 1001 and numbers other than this format are also divisible by 1001./1001 → abcabc रूप की सभी संख्याएं 1001 (7×11×13) से भाग होगी। परन्तु 1001 से भाग होने वाली संख्याएं abcabc रूप के अलावा भी और किसी प्रारूप में हो सकती हैं।

145145 → 145000+145+ → 145(1000+1) → 145×1001

10101 → All the numbers of ababab format will be divisible by 10101./10101 → ababab प्रारूप की सभी संख्याऐं 10101 से भाग होगी।

Dividing format/remainder theorem

Example:

Divident/भाज्य

11)78(7 Quotient (भागफल)
Divisor (भाजक)   −77
1 Remainder (शेषफल)

Note:- Divisor > Remainder

Divident = divisor × quotient + Remainder

Negative Remainder:

11)78(8
−88
−10

अगर remainder (–) आऐ तो उसे (+) बना ले, (भाजक को remainder में जोड़ने पर)

– 10 + 11 → 1 (actual remainder)

- $\left(\frac{27+29}{5} \to \frac{-3-1}{5} \to \frac{-4+1}{5} \to 1\right)$

Rules of remainder:-

- $\frac{27+29}{5} \to \frac{27}{5}+\frac{29}{5} \to \frac{2+4}{5} = 1$
- $\frac{27\times 29}{5} \to \frac{2\times 4}{5} \to \frac{8}{5} = 3$

It means, $\frac{A+B+C+D}{M} \to R = \frac{A_R+B_R+C_R+D_R}{m}$

$\frac{A\times B\times C\times D}{m} \to R = \frac{A_R\times B_R\times C_R\times D_R}{m}$

Important divisiblity concepts:-

- If each of two numbers is divided by the same divisor, then the remainders are R_1 and R_2 respectively. And if the sum of those two numbers is divided by the same divisor, the remainder is R_3, then/यदि दो संख्याओं में से प्रत्येक को समान भाजक से भाग किया जाता है तब शेषफल क्रमश: R_1 तथा R_2 बचता है। और यदि उन दोनों संख्याओं के योगफल को उसी भाजक से भाग दिया जाता है तो शेषफल R_3 बचता है, तब

$R_1 + R_2 = R_3$

or

$R_1 + R_2 > R_3$

$R_1 + R_2 - R_3 =$ Divisor

- Successive division theorem:- If a number is divided by m and n respectively, the remainder remains r_1 and r_2 respectively. In such a situation that number can be known./क्रमागत विभाजन प्रमेय: यदि किसी संख्या को क्रमश: m तथा n से भाग किया जाता है तो शेषफल क्रमश: r_1 तथा r_2 बचता है। ऐसी स्थिति में उस संख्या को ज्ञात किया जा सकता है।

Ex:- If a number is divided by 4 and 5 respectively, the remainder is 3 and 1 respectively, then find the least number./अगर किसी संख्या को क्रमश: 4 एवं 5 से भाग किया जाए तब शेषफल क्रमश: 3 एवं 1 बचता है तब न्यूनतम संख्या ज्ञात करें।

पहला भाजक	भाज्य/संख्या	पहला शेषफल
दूसरा भाजक	भागफल	दूसरा शेषफल
	x	

↓

अंतिम भागफल, (न्यूनतम मान ले ताकि गणना करना आसान हो जाए)

4	7	3
5	1	1
	0	

(let 0 for minimum no.)

5×0+1=(1)

4×1+3=(7)

7 is the minimum number

3	19	1
4	6	2
	1	

let(1)

4×1+2=6

6×3+1=19

That is, there can be many such numbers./यानि ऐसी कई सारी संख्याऐं हो सकती है।

- Consecutive remainder (लगातार शेषफल):-

15)8001(533
75
50
45
51
45
6

लगातार शेषफल 5, 5 and 6

- **Cancellation Remainder theorem:-** For simplication of the expression of the fraction, you should try to cancel out parts of the numerator and denominator as much as you can, then final remainder to be multiplied by the canceled number to get the actual remainder./अंश की अभिव्यक्ति को सरल बनाने के लिए, आपको अंश और भाजक के हिस्सों को जितना हो सके उतना रद्द करने का प्रयास करना चाहिए, फिर वास्तविक शेष प्राप्त करने के लिए अंतिम शेष को रद्द संख्या से गुणा किया जाना चाहिए।

$\frac{N.M}{D.M} = \frac{21}{6}$ (N.M = Numerator, D.M. = denominator)

Remainder = 3

If we write $\frac{21}{6} \to \frac{7}{2} \Rightarrow 1$ (Remainder)

Actual remainder 1×3

↓

3

Fraction $\frac{21}{6} = \frac{7}{2} \Rightarrow 1$

It means अगर divident या divisor में किसी संख्या से divide या multiple करते है तो remainder में भी automatically divide या multiply हो जाता है।

- **Chinese Remainder theorem:-** Chinese remainder theorem states that if one knows the remainders of the Euclidean division of an integer n by several integers, then one can determine uniquely the remainder of the division of n by the product of these integers, under the condition that the divisors are pairwise coprime./चीनी शेषफल प्रमेय में कहा गया है कि यदि कोई पूर्णांक n के यूक्लिडियन विभाजन के अवशेषों को कई पूर्णांकों से जानता है, तो इन पूर्णांकों के उत्पाद द्वारा n के विभाजन के शेष को विशिष्ट रूप से निर्धारित किया जा सकता है, इस शर्त के तहत कि विभाजक जोड़ीदार सह अभाज्य हैं।

Type:- I $\frac{x^y}{N}$ (N → a×b×c) $\Rightarrow$ R, $\frac{x^y}{a} \to R$, $\frac{x^y}{b} \to R$, $\frac{x^y}{c} \to R$ — Remainder is same in all cases

Type:- II $\frac{x^y}{N}$ (N → a×b×c) $\Rightarrow$ R, $\frac{x^y}{a} \to R_1$, $\frac{x^y}{b} \to R_2$, $\frac{x^y}{c} \to R_3$

Common Remainder = R

$R = (a - R_1) = (b - R_2) = (c - R_3)$

Type:-III

$\frac{N}{D}$ (D → a×b×c) $\Rightarrow$ R, $\frac{N}{a} \to R_1$, $\frac{N}{b} \to R_2$, $\frac{N}{c} \to R_3$

a) N (x, R_1 (same as,)

$R = ax + R_1 = by + R_2 = cz + R_3$

[where as, $(a - R_1) \neq (b - R_2) \neq (c - R_3)$]

- **Cyclicity Remainder theorem:-** It concept utilizes the fact that remainders repeat themselves after a certain interval when divded by a number./यह अवधारणा इस तथ्य का उपयोग करती है कि शेषफल एक निश्चित अंतराल के बाद एक संख्या से विभाजित होने पर खुद को दोहराते हैं।

$\frac{3^1}{5}$, R = 3 $\frac{3^2}{5}$, R = 4

$\frac{3^3}{5}$, R = 2 $\frac{3^4}{5}$, R = 1

$\frac{3^5}{5}$, R = 3

Note:- Mostly after the remainder 1, there is a repetition of the cyclicity./ शेषफल 1 के बाद ज्यादातर,चक्रीयता की पुनरावृत्ति होती है।

$\frac{p}{q}$ Where as, p and q are co-prime and q is prime.

$\frac{p}{q}$ जहाँ, p और q सह-अभाज्य हैं और q अभाज्य है।

- **Algebric Remainder Theorem:-**

Example:- Find the remainder when P(x): $3x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 2$ is divided by Q(x) : (x – 1)

शेफल ज्ञात कीजिए जब P(x): $3x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 2$ को Q(x) : (x – 1) से विभाजित किया जाए

Sol. For finding remainder in algebric expression put $x - 1 = 0$, $x = 1$

Put $x = 1$ in p(x) and that value which we will get is the remainder of the algebric expression.

$p(x) = 3(1)^5 - (1)^4 + (1)^3 - 4(1)^2 + 2$

$p(x) = 1$

Hence, 1 is the remainder of the given expression.

- **Fermat's theorems:** $\frac{p^{q-1}}{q} \Rightarrow$ Remainder always 1 only

If, q is a prime number, p and q are co-prime numbers/फर्मेट की प्रमेय: $\frac{p^{q-1}}{q}$ शेष हमेशा केवल 1 आएगा यदि, q एक अभाज्य संख्या है, p और q सह-अभाज्य संख्याएँ हैं

- **Wilson's theorem:**/विल्सन की प्रमेय:

(1) If p is a prime number then,/यदि p एक अभाज्य संख्या है तो

$\frac{(p-1)!}{p} \rightarrow$ always remainder – 1 or p–1

(2) $\left(\frac{mn+n}{m}\right)^p \rightarrow$ Remainder (n^p) (p चाहे even हो या odd हो)

(3) $\left(\frac{mn-n}{m}\right)^p$ If p is odd, then remainder $[-(n)^p]$/यदि p विषम है, तो शेषफल $[-(n)^p]$

If p is even then remainder $\rightarrow +(n)^p$/यदि p सम है तो शेषफल $\rightarrow +(n)^p$

Totient:- The number of positive integers not greater than a specified integers that are relatively prime to it./धनात्मक पूर्णांकों की संख्या निर्दिष्ट पूर्णांकों से अधिक नहीं होती है जो इसके लिए अपेक्षाकृत प्रमुख हैं।

totient $\rightarrow n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$

Example:- find totient of 2.

totient = $2\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$2\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow 1$

(ϕ) totient of $15 \rightarrow 5^1 \times 3^1$ (5 & 3 are in prime number)

$15\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \rightarrow 16$

$d \rightarrow a^p b^q c^r$ (a,b,c are factors of d and they are prime no.)

$d \rightarrow a^p b^q c^r$ (a,b,c $\rightarrow$ d के गुणनखंड हैं और वे अभाज्य संख्या हैं।)

then totient = $d\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$

cyclicity $\frac{a^p}{d} = 1$(remainder)

p $\rightarrow$ cyclicity (related with d)

where as a & d are co-prime number. d is prime number/जहाँ a और d सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। d अभाज्य संख्या है

- **Factors/गुणनखण्ड:**-The number by which a main number is divided completely, then that number is called a factor of the prime number./किसी मूल संख्या को पूर्ण रूप से जिस संख्या द्वारा भाग कर दिया जाऐ, तो उस संख्या को मुख्य संख्या का गुणनखण्ड कहा जाता है।

Ex: 100 can be divided exactly by 5 means 5 will be a factor of 100./100 को 5 से पूर्ण रूप से भाग किया जा सकता है इसका मतलब 5, 100 का गुणनखण्ड होगा।

- **Total number of factors/कुल गुणनखण्ड:**

100 $\rightarrow$ (break in prime number)/100 (अभाज्य संख्याओं में तोड़े)

$5 \times 5 \times 2 \times 2$

$\downarrow$

$5^2 \times 2^2$

- **Total factors (2+1)(2+1) $\rightarrow$ 9**

$p^a \times q^b$ [where as p & q are prime numbers then total factors $\rightarrow$ (a+1)(b+1)]/$p^a \times q^b$ जहाँ p और q अभाज्य संख्या हैं तब कुल कारक (a+1)(b+1)]

- **Total odd factors of 100 $\rightarrow 5^2 \times 2^2$**

(2+1) $\rightarrow$ 3 कुल विषम कारक

$p^a \times q^b \rightarrow$ [where p is odd number & q is even number then total odd factors are (a +1)]/$p^a \times q^b$ जहाँ p विषम संख्या है और q सम संख्या है तो कुल विषम कारक हैं $\rightarrow$ (a+1)

- **Total even factors/कुल सम कारक:-** $160 \rightarrow 2^5 \times 5^1$

(5) (1+1) $\rightarrow$ 12

$p^a \times q^b$ [where as p is even number and q is odd number then total even factors are (a)(b+1)]/जहाँ p सम संख्या है और q विषम संख्या है तो कुल सम कारक हैं- (a)(b+1)

- **Sum of factors/कारकों का योग:-** 100 $\rightarrow 2^2 \times 5^2$

$(2^0 + 2^1 + 2^2)(5^0 + 5^1 + 5^2)$

(1+2+4) (1+5+25) = 217

$p^a \times q^b$ (p & q are prime numbers) then sum of factors $(p^0 + \ldots\ldots p^a)(q^0 + \ldots\ldots. q^b)$

- **Sum of odd factors/**विषम कारकों का योग**:-** $100 \rightarrow 5^2 \times 2^2$

then sum of odd factors $(5^0+5^1+5^2) \rightarrow 31$

$p^a \times q^b$ (p is only odd number then sum of factors- $(p^0 + \ldots.. p^a)$

- **Sum of even factors:** 100 $\rightarrow 5^2 \times 2^2$/सम गुणनखण्डों का योग 100 $\rightarrow 5^2 \times 2^2$

$(2^1+2^2)(5^0+5^1+5^2)$

$p^a \times q^b$ (If p is even q is odd number then $\rightarrow p^a \times q^b$

- **Sum of reciprocal of all factors of/के सभी कारकों के व्युत्क्रम का योग 900 $\rightarrow 2^2 \times 3^2 \times 5^2$**

$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1+5^2) \rightarrow 2821$

sum of reciprocal of all factors/सभी कारकों के व्युत्क्रम का योग

- Formula $\rightarrow \frac{\textit{Sum of factors}}{\textit{number}} \rightarrow \frac{2821}{900}$ ans.

- **Product of factors (गुणनखंडों का गुणनफल)**

  Formula = $(\text{number})^{\frac{\text{total factors}}{2}}$

  Ex: 15 → 1,3,5,15 formula $1 \times 3 \times 5 \times 15$ → 225

- **Perfect square factors:-/पूर्ण वर्ग गुणनखण्ड**

  How many such factors are there in $2^5 \times 3^6 \times 5^2$ which is a perfect square?/$2^5 \times 3^6 \times 5^2$ में ऐसे कितने गुणनखण्ड है जो पूर्ण वर्ग है?

  In this case, always divide the power of the number by 2. Or make the number a perfect square (and remove the remaining number.)/ऐसी स्थिति में हमेशा संख्या की घात में 2 से भाग कर दे। या संख्या को पूर्ण वर्ग बना ले (एवं बची संख्या को हटा दे।)

  $2^5 \times 3^6 \times 5^2$

  $2^1 \times (2^2)^2 \times (3^2)^3 \times (5^2)^1$

  $(2+1)(3+1)(1+1) \Rightarrow 24$

- **Perfect cube factors:-/पूर्ण घन गुणनखण्ड**

  How many factors are there in 211 × 39 × 57 which is a perfect cube?

  In such a situation, always divide the power of the number by 3. Or make the number a perfect cube (and remove the remaining number.)

  $2^{11} \times 3^9 \times 5^7$ में ऐसे कितने गुणनखण्ड है, जो पूर्ण घन है?

  ऐसी स्थिति में हमेशा संख्या की घात में 3 से भाग कर दे। या संख्या को पूर्ण घन बना ले (एवं बची संख्या को हटा दे।)

  $2^2 \times (2^3)^3 \times (3^3)^3 \times (5^3)^2 \times 5^2 \rightarrow (3+1)(3+1)(2+1) \rightarrow 48.$

- **Special cases of factors:-**

  How many factors are there in 9600 which are multiples of 120

  9600 में ऐसे कितने गुणनखण्ड है, जो 120 के गुणज है

  $120 \rightarrow 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

  $9600 \rightarrow 2^7 \times 3^1 \times 5^2 \rightarrow 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times (2^4 \times 5^1)$

  $\rightarrow (4+1)(1+1) \rightarrow (10)$

- **Common factors:-**

  $\mathbf{x^a + y^a}$ is divisible by x + y only when a is odd number $\mathbf{x^a - y^a}$ is divisible by x – y only when a is odd number $\mathbf{x^a - y^a}$ is divisibly by both (x – y) and (x + y) only when a is even number

  $x^a + y^a$ is neither divided by $x + y$ nor $x - y$ when a is even.

  $\mathbf{x^a + y^a}$ केवल x + y से विभाज्य है जब a विषम संख्या है

  $\mathbf{x^a - y^a}$ केवल x – y से विभाज्य है जब a विषम संख्या है

  $\mathbf{x^a - y^a}$ दोनों (x – y) और (x + y) दोनों से विभाज्य है केवल जब a सम संख्या है

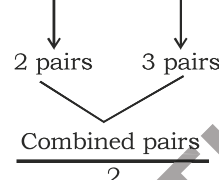
  $\mathbf{x^a + y^a}$ ना x + y से विभाज्य है और ना ही $x - y$ से, जब a सम संख्या है

Total number of zeroes at the end of any number/किसी संख्या के अंत में आने वाले शून्यों की कुल संख्या:-

Unit digit (0) depends on 10 and 10 is written as (5×2) i.e. the number of combined pairs of (5 and 2) will be the same number of zeros.

इकाई अंक (0), 10 पर निर्भर करता है और 10 को (5×2) लिखते है यानि जितने (5 एवं 2) के संयुक्त जोड़े बनेंगे, उतने ही शुन्यकों की संख्या होंगी।

example: $5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$



$\frac{\text{Combined pairs}}{2}$

- **factorial में number of zerores:** 0 आता है 10 में, 10 बनता है 5×2 दोनों से

  Ex: 60! के अन्त में total कितने zero होंगे।

  60! में 5 के गुणनखण्डों की संख्या = $\frac{60}{5} = 12$

  $\frac{12}{5} = \frac{2}{14}$

  60! में 2 के गुणनखण्डों की संख्या = $\frac{60}{2} = 30$

  $\frac{30}{2} = 15$

  $\frac{15}{2} = 7$

  $\frac{7}{2} = 3$

  $\frac{3}{2} = \frac{1}{56}$

  10 उतना ही बनेगा जितना 5 × 2 आयेगा।

  उपरोक्त संख्या में 2, 56 बार आया है तथा 5, 14 बार आया है। अत: 5 × 2, 14 बार आयेगा। (5 × 2 के गुणा में जो संख्या कम बार आयी है। उतनी ही बार 0 का निर्माण होगा।)

- **Series in AP, G.P and H.P format/AP, G.P और H.P प्रारूप में श्रृंखला:-**

- **A.P (Arithmetic progeression/समांतर श्रेणी/ अनुक्रम श्रेणी/अंकगणितीय श्रेणी।**

  A continuous sequence in which the numbers are continuously and in a definite increasing or decreasing order and the common difference of any two consecutive numbers remains the same./एक लगातार क्रम जिसमें संख्याऐं लगातार एवं निश्चित रूप से बढ़ते या फिर घटते क्रम में हो एंव किन्ही लगातार दो संख्याओं का सार्व अंतर समान रहता हो।

a, a+d, a+2d, a+3d......n^{th} term

a+d – a = d (always)

AP में n^{th} पदों का योग = $\frac{n}{2}$ [2a + (n – 1)d]

or

= $\frac{n}{2}$ [first term +last term]

जहां n → कुल पदों की संख्या

a → पहला पद

d → सार्व अंतर

AP में कुल पदों को पता लगाने का तरीका

$\Rightarrow \frac{\text{आखिरी पद - पहला पद}}{\text{सार्वन्तर}} + 1$

AP में किसी विशेष पद n का पता लगाने का तरीका

⇒ n^{th} term = a + (n–1)d

(a= पहला पद d= सार्व अंतर)

Ex:- अगर 12th term निकालना है तब

12 = a + (12 – 1)d

How to let AP values: AP in odd term

↓

a–d,a,a+d

AP in even term: a–3d, a–d, a+d, a+3d

Formula of two numbers a and b which are given in AP format

दो संख्याओं a और a का सूत्र जो AP रूप में दिया गया है

A.M./Average = $\frac{a+b}{2}$ (arithmetic mean)

A.M. of three numbers a,b and c

A.M. = $\frac{a+b+c}{3}$

Geometric progression/गुणोत्तर श्रेणी:-

A series in which the ratio of any two consecutive numbers is always fixed is called a geometric series, and their ratio is called a common ratio.

वह श्रेणी जिसमें किन्ही भी दो लगातार संख्याओं का अनुपात हमेशा निश्चित रहता है, ऐसी श्रेणी को गुणोत्तर श्रेणी कहा जाता है, और उनके अनुपात को सार्वानुपात कहा जाता है।

Ex: a, ar, ar^2, ar^3, ar^4

a : ar $ar^3 : ar^4$

1 : r 1 : r

How to let G.P values:/गुणोत्तर श्रेणी का मान कैसे ज्ञात करें

G.P. in odd terms

$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}$, a, ar, ar^2

G.P in even terms

$\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}$,ar,$ar^3$

- **Sum of nth term is GP format/गुणोत्तर श्रेणी में nवें पदों का योग**

↓

$\boxed{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}$ = a+ar+ar^2+....ar^n (r > 1)

Or

$\boxed{\frac{a(1-r^n)}{1-r}}$ = a+ar+ar^2+....ar^n (r < 1)

a → पहला पद

r → सार्वानुपात

n → total no. of terms/कुल पदों की संख्या

→ Sum of upto infinite terms in GP format

$\boxed{\frac{a}{1-r}}$ (where as r < 1)

GP में किसी n^{th} वे पदों का पता लगाने का तरीका → ar^{n-1}

Ex:- 11th → ar^{11-1}

Geometric mean of two numbers (a and b) = $\sqrt[2]{ab}$

दो संख्याओं (a और b) = $\sqrt[2]{ab}$ का ज्यामितीय माध्य =

GM of three numbers (a, b & c) = $\sqrt[3]{a.b.c}$

GM तीन संख्याओं (a, b & c) = $\sqrt[3]{a.b.c}$

- **H.P.(Harmonic progression)/हरात्मक श्रेणी:**–If the reciprocal of a series is in A.P format then it is called HP

यदि किसी श्रृंखला का व्युत्क्रम A.P समांतर श्रेणी प्रारूप में है तो उसे हरात्मक श्रेणी कहा जाता है

HP = $\frac{1}{AP}$

Ex: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$ → reciprocal (2,3,4,5)

→ Harmonic mean of two numbers a & b/दो संख्याओं a और b का हरात्मक माध्य = $\frac{2ab}{a+b}$

→ Harmonic mean of $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ is given by,

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots \frac{1}{a_n}\right)$$

➢ Relation among (AM, GM. and H.M) of two numbers a and b
दो संख्याओं a और b का (AM, GM. और H.M) के बीच संबंध

➢ $AM \geq GM \geq HM$

If a & b are different then $AM > GM > HM$

If a & b are same then, $AM = GM = HM$

$\Rightarrow (G.M)^2 = AM \times HM$

Perfect square based concepts:- If a rational number is obtained by taking the square root of a natural number, then it is called a prime number. For any number to be prime number, the following three conditions must be satisfied./किसी प्राकृतिक संख्या का वर्गमूल लेने पर यदि परिमेय संख्या प्राप्त होती है तो उसे पूर्ण वर्ग संख्या कहते है। किसी भी संख्या को पूर्ण वर्ग होने के लिए निम्न तीन शर्तो का पूर्ण होना आवश्यक है।

1. If a perfect square number is divided by 9, then only one of the digits 0, 1, 4, 7 must come out of the number.
अगर किसी पूर्ण वर्ग संख्या को 9 से भाग दिया जाता है तब remainder 0,1,4,7 मे से ही किसी एक का आना जरूरी हैं।
2. The last two digits of all perfect square numbers are the same as the last two digits of the square from 1 to 24. (But it is not necessary that if the last 2 digits of a number are the same as those in 1 - 24, then that number will be a perfect square.)
सभी पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम दो अंक 1 से लेकर 24 तक के वर्ग के अन्तिम दो अंकों के समान ही होते है। (लेकिन यह जरूरी नही है कि अगर किसी संख्या के अंतिम 2 अंक वही है जो 1 - 24 तक में आखिरी मे होते है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग होगी।)
3. All perfect square numbers cannot have a digit other than 0, 1, 4, 5, 6, 9 as the last digit./सभी पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम अंक के रूप में 0,1,4,5,6,9 के अलावा अन्य अंक नही हो सकता।

➢ A perfect square number has always ends only "pair of zeroes"/एक पूर्ण वर्ग संख्या हमेशा केवल ''शून्यों की जोड़ी'' पर समाप्त होती है

➢ Last two digits of a perfect square even number must be divided by 4./एक पूर्ण वर्ग संख्या हमेशा केवल 'शून्यों की जोड़ी' पर समाप्त होती है

➢ If a perfect square number ends with 5, then its tenth place digit must be 2./यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या के अंत में 5 आता है, तो उसके दसवें स्थान का अंक 2 होना चाहिए।

➢ Every perfect square decimal number always has even number of digits after decimal./प्रत्येक पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या में दशमलव के बाद हमेशा सम संख्या होती है।

- **Square and square root:-**

➢ $(ab)^2 \rightarrow$ a^2 b^2
$2 \times a \times b$

➢ $(axy)^2 = (ab)^2$ (where as xy = b)
$(ab)^2 =$ a^2 b^2
$2 \times a \times b$

➢ The square root of any number is equal to a number which when squared gives the original number./किसी भी संख्या का वर्गमूल उस संख्या के बराबर होता है जिसे वर्ग करने पर मूल संख्या प्राप्त होती है।

Let us say m is a positive integer, such that/मान लें कि m एक धानात्मक पूर्णांक है, जैसे कि $\sqrt{(m)(m)} = \sqrt{(m^2)} = m$

How to find square root of any number/किसी भी संख्या का वर्गमूल कैसे निकालें:-

➢ Take the largest number as the divisor whose square is less than or equal to the number on the extreme left of the number. The digit on the extreme left is the dividend. Divide and write the quotient. Here the quotient is 2 and the remainder is 0.
भाजक के रूप में सबसे बड़ी संख्या लें जिसका वर्ग संख्या के सबसे बाई ओर की संख्या से कम या उसके बराबर हो। सबसे बायीं ओर का अंक लाभांश है। भाग करके भागफल लिखिए। यहाँ भागफल 2 है और शेषफल 0 है।

```
      2
 2 | 4 84
   | -4
   |  0
```

➢ Next, we then bring down the number, which is under the bar, to the right side of the remainder. Here, in this case, we bring down 84. Now, 84 is our new dividend.
इसके बाद, हम उस संख्या को नीचे लाते हैं, जो बार के नीचे है, शेष के दाई ओर। यहाँ, इस मामले में, हम 84 को नीचे लाते हैं। अब, 84 हमारा नया लाभांश है।

```
      2
 2 | 4 84
   | -4
   |  0 84
```

➢ Now double the value of the quotient and enter it with a blank space on the right side./अब भागफल के मान को दुगुना कर दें और दाहिनी ओर रिक्त स्थान के साथ इसे प्रविष्ट करें।

```
        2
2 | 4̄ 8̄4̄
  | −4
----------
4− | 0 84
```

- Next, we have to select the largest digit for the unit place of the divisor (4_) such that the new number, when multiplied by the new digit at the unit's place, is equal to or less than the dividend (84).

In this case, 42 × 2 = 84. So the new digit is 2./ इसके बाद, हमें भाजक (4_) के इकाई स्थान के लिए सबसे बड़े अंक का चयन करना होगा, ताकि नई संख्या, जब इकाई के स्थान पर नए अंक से गुणा की जाए, भाज्य (84) के बराबर या उससे कम हो।

इस स्थिति में, 42 × 2 = 84. अतः नया अंक 2 है।

```
        2 2
 2 | 4̄ 8̄4̄
   | −4
----------
42 | 0 84
   |  −84
----------
   |   0
```

- The remainder is 0, and we have no number left for division, therefore, $\sqrt{484}$ = 22

शेषफल 0 है, और हमारे पास विभाजन के लिए कोई संख्या नहीं बची है, इसलिए, $\sqrt{484}$ = 22

- How to find the cube of any two digit number/किसी भी दो अंकों की संख्या का घन कैसे निकालें:-

Cube ↓

Type-I	Type- II	Type- III	Type- IV
$(1a)^3$	$(a1)^3$	$(aa)^3$	$(\text{universal})^3/(ab)^3$

Type-I: $(1a)^3 \rightarrow 1\ \ a\ \ a^2\ \ a^3$
$\quad\quad +2a\ \ 2a^2$

Type-II: $(a1)^3 \rightarrow a^3\ \ a^2\ \ a\ \ 1$
$\quad\quad +\ \ 2a^2\ \ 2a$

Type-III: $(aa)^3 \rightarrow a^3\ \ a^3\ \ a^3\ \ a^3$
$\quad\quad +\ \ 2a^3\ \ 2a^3$

Type-IV: (Universal)
$(ab)^3 \rightarrow a^3\ \ a^2b\ \ ab^2\ \ b^3$
$\quad\quad +\ \ 2a^2b\ \ 2ab^2$

- How to find cube of any three digit number:

(axy) = $(ab)^3$ (where as, xy = b)

$(ab)^3 = a^3\ \ 3a^2b\ \ 3ab^2\ \ b^3$

No.	Square	No.	Square	No.	Square
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	26	676
7	49	17	289	27	729
8	64	18	324	28	784
9	81	19	361	29	841
10	100	20	400	30	900
No.	**Cube**	**No.**	**Cube**	**No.**	**Cube**
1	1	11	1331	21	9261
2	8	12	1728	22	10648
3	27	13	2197	23	12167
4	64	14	2744	24	13824
5	125	15	3375	25	15625
6	216	16	4096	26	17576
7	343	17	4913	27	19683
8	512	18	5832	28	21952
9	729	19	6859	29	24389
10	1000	20	8000	30	27000

Factorial/क्रमगुणित:- The product of consecutive numbers from 1 to d is called a factor./1 से लेकर n तक की लगातार संख्याओं के गुणनफल को क्रमगुणित कहते है।

$1\times2\times3\times4\times.......n \Rightarrow n! = n(n-1)!$

$1\times2\times3\times4\times5 \Rightarrow 5!$

$0! \Rightarrow 1$

Find maximum power of a prime no. in facorial/ अभाज्य संख्या की अधिकतम शक्ति ज्ञात कीजिए। भाज्य में

Ex: 5! = 1×2×3×4×5
↓
$2^3\times3^1\times5^1$

$2^3 \Rightarrow$ 3 times,

or direct 5! →
```
2 | 5 ←(leave)
2 | 2
  | 1
```
2+1=3

10! में 2^3 कितनी बार आऐगा।

$(2^3 \rightarrow 8)$
```
8 | 10
  | 1 → 1
```

- If संख्या बड़ी हो और calculation करने में ज्यादा समय लगे, तब formula apply करें।

n! में man power of prime number p

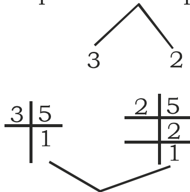
$\left(\frac{n}{p}\right)+\left(\frac{n}{p^2}\right)+\left(\frac{n}{p^3}\right)+.....$तब तक लिखते है,जब तक NM. DM, से कटता रहे।

N.M = Numerater

D.M.=Denomenator

➢ If numbers is not prime तब 5! में 6 की max. power क्या होगा?

first step break 6 in prime no.



Take least value that is one, so 6 की max power is 1

Note: n! में generally छोटे no. की power ज्यादा तथा बड़े no. की power कम होती है।

Important results:

1. If $\frac{N}{D} \rightarrow$ remainder is R

then, $\frac{2N}{D} \rightarrow$ remainder is 2R

then, $\frac{3N}{D} \rightarrow 3R$

then, $\frac{N^2}{D} \rightarrow R^2$

then, $\frac{N^3}{D} \rightarrow R^3$

then, $\frac{2N+1}{D} \rightarrow 2R+1$

3. $129\overline{)x(}$ with remainder 27; $86\overline{)4x(}$ R=?

x = 129Q+27 (Quotient)

$4x$ = 4(129Q+27)

$\frac{4\times129Q}{86} + \frac{27\times4}{86}$

↓

22

➢ **Series based concepts:**

$9 + 99 + 999 + \ldots\ldots$ nth terms $= \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9}$

$9\,(1+11+111+\ldots\ldots$ nth terms$) = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9}$

$1+11+111+\ldots\ldots\ldots$ nth term $= \frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}$

➢ **Computer Number system (CNS):**

Decimal CNS $\Rightarrow$ 0,1,2,3,4,5 .... etc $\Rightarrow (\ )_{10}$

Binary CNS $\Rightarrow$ 0,1 $\Rightarrow (\ )_2$

Octal CNS $\Rightarrow$ 0, 1, 2, 3, 4, 5,.........etc $\Rightarrow (\ )_8$

Hexa Decimal CNS $\Rightarrow$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 $\rightarrow (\ )_{16}$

(10 → A, 11 → B, 12 → C, 13 → D, 14 → E, 15 → F)

Example: Convert $(131)_{10}$ to $(x)_2$?

2	131	
2	65	→ 1
2	32	→ 1
2	16	→ 0
2	8	→ 0
2	4	→ 0
2	2	→ 0
2	2	→ 0
	1	→ 0

$(10000011)_2$

➢ **Bar based concepts:**

Formulae:

$0.\overline{p} = \frac{p}{9}$

$0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$

$0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$

$0.p\overline{qr} = \frac{pqr - p}{990}$

$0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$

Example:-

1. .8888.......∞ → $.\overline{8}$ → $\boxed{\frac{8}{9}}$

2. .789789789......∞ → $.\overline{789}$ → $\frac{789}{999}$

3. $.8\overline{90}$ → $\frac{890-8}{990} \rightarrow \frac{882}{990}$

4. $0.57\overline{3}$ → $\frac{573-57}{900} \rightarrow \frac{516}{900}$

5. $2.\overline{75} + 3.\overline{78}$

2+3

↓

5

$\frac{75}{99} + \frac{78}{99}$

$\frac{153}{99}$

$5+1+\frac{54}{99}$

$6.\overline{54}$

6. $27 \times 1.\overline{2} \times 5.526\overline{2} \times 0.\overline{6}$

$$27 \times \frac{11}{9} \times \left(5+\frac{4736}{9000}\right) \times \frac{6}{9}$$

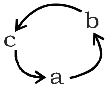
$$=22\left(5+\frac{4736}{9000}\right)=110+\frac{104192}{9000}=110+11.576=121.576$$

➢ **Important Points:-** (divisibility with special cases)

abc = 100 a + 10b + c

bca = 100 b + 10c + a

cab = 100c + 10a + b



add all equation,

abc + bca + cab = 111 a + 111b + 111c

= 111(a+b+c) = 3×37(a+b+c)

Number	Divisor	Quotient
abc + bca + cab	111	a+b+c
	a+b+c	111
	37	3(a+b+c)
	3	37 (a+b+c)
	3(a+b+c)	37
	37(a+b+c)	3

➢ Without performing actual addition and division find the quotient when 237 + 372 +723 is divided by/वास्तविक जोड़ और भाग किए बिना भागफल ज्ञात करें जब 237 + 372 +723 को विभाजित किया जाता है

			Quotient
(i)	111	→	2+3+7=12
(ii)	2+3+7	→	111
(iii)	37	→	3(2 + 3 + 7) = 36
(iv)	3	→	37(2+3+7) = 37×12=444
(v)	36	→	3(a+b+c) → 37
(vi)	444	→	37(a+b+c) → 3

• abc and cba when a>c then abc > cba

abc – cba = (100a + 10b + c) – (100c +10b +a)

= 99a – 99c = 99 (a – c) = 3^2 × 11(a – c)

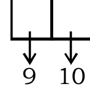
when c > a ⇒ 99 (c – a) = 3^2 × 11 (c – a)

	Divisor	Quotient
(1)	99	a–c
(2)	a–c	99
(3)	3	33(a–c)
(4)	33(a–c)	3
(5)	3(a–c)	33
(6)	33	3(a–c)
(7)	9	11(a–c)
(8)	11(a – c)	9

Some Important Points:-

➢ Find all possible no. of 2 digit.

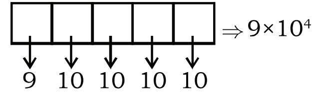
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9



9 10 (Digits)

all possiple no. = 9 × 10 = 90

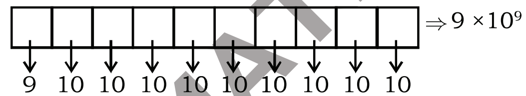
➢ All possible no. of 5 digit.



⇒ 9×10^4

9 10 10 10 10

➢ All possible no. of 10 digit,

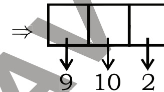


⇒ 9×10^9

9 10 10 10 10 10 10 10 10 10

➢ All possible no. of n digit, ⇒ $9 \times 10^{n-1}$

➢ Find all possible no. which is divisible by 5. of 3 digit

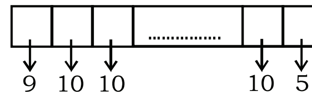
⇒ 

9 10 2

⇒ if Unit digit = 0,5, then no. will be divided by 5.

= 9 × 10 × 2.

➢ Find all possible even no. of 50 digit,



9 10 10 10 5

even no. unit digit 0, 2, 4, 6, 8

⇒ $9 \times 10^{48} \times 5$

➢ Find all possible odd no. of n digit,

⇒ $9 \times 10^{n-2} \times 5$

Unit digit of odd no. = 1, 3, 5, 7, 9

Miscellaneous concepts

➢ अगर किन्ही तीन अभाज्य संख्याओं का योग एक सम संख्या है तब उन अभाज्या संख्याओ में 2 जरूर होगा।

➢ factor based question: which learn

(18) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{9}$ (15)

2×9 = 18, 5 × 3 = 15

16 > 15

$\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$

- $\frac{4^p}{6} \rightarrow$ always remainder (4)
- $\frac{10^p}{6} \rightarrow$ always remainder (4)
- किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के गुणनखंडों की संख्या हमेशा विषम रूप में होगी।

  $\rightarrow$ N क्रमागत लगातार संख्याओं का गुणा हमेशा N से विभाजित होगा

  Ex:- 2×3×4, 3 से विभाजित होगा।
- $1+2+3+4+5+4+3+2+1 \rightarrow 5^2$
- $\sqrt{x}$ is a rational no. If x is a perfect square.
- $\sqrt{x}$ is a irrational no. if x is a non-perfect square.
- दो संख्याऐं a और b के बीच में अनंत परिमेय तथा अपरिमेय संख्याऐं होती है।

  a और b के बीच में rational number $\Rightarrow \frac{ak+b}{k+1}$

  जहां k = 1, 2, 3......etc

  a और b के बीच में irrational no.
- $(ab)^{\frac{1}{2}} \cdot (ab)^{\frac{1}{3}} \cdot (ab)^{\frac{1}{4}}$....etc

  (If a = 3, b = 9, then $(ab)^{1/3}$ consider नही होगा।)
- zero is neither (positive) nor(negative) but an even integer.
- First natural no. is 1
- First whole/पूर्ण no. is 0
- First even no. is 2 (not consider 0)
- Factors हमेशा + ही होंगे।
- Even and odd (can be both positive and negative.)/ सम एवं विषम (धनात्मक एवं ऋणात्मक दोनों ही हो सकते हैं।)
- (–) में prime no. नही होते।
- क्रमागत संख्याऐं consecutive no. which follows same difference
- Average of factors = $\frac{\text{sum of all factors}}{\text{total no. of all factors}}$
- 100001 is prime or not = ?

  ↓

  $10^5+1 \Rightarrow a^n+b^n$ is divided by 11 यानि It is not prime no.
- Rules of 7:-

  $ABC \rightarrow \frac{2A+3B+C}{7}$

  $\frac{AB-2C}{7}, \frac{3A+B-2C}{7}$
- Maximum sum of two digits can be 18

  दो अंकों का अधिकतम योग 18 हो सकता है
- (9+9=18)
- If a number is divided by 2 or 5 to get t, then instead of dividing the whole number, try dividing only the unit's digit./अगर किसी संख्या को 2 या 5 से भाग करके R निकालते है तो पूरी संख्या को भाग करने की बजाय सिर्फ इकाई का अंक भाग करके देख ले।
- If any digit is repeated 6 times 12 times, 18 times, (multiple of 6) then resultant no. must be divisible by (3, 7, 11, 13, 37)

  Ex:- 555555, 999999999999
- 2 is the only even prime number.

  2 अकेला एक सम अभाज्य संख्या है।
- If the sum of the digits of any number is subtracted from the same number, the number obtained will always be divided by 9./किसी भी संख्या के अंकों के योग को उसी संख्या में से घटाने पर प्राप्त संख्या हमेशा 9 से कटेगी।
- The sum of a two digit number and the number formed by reversing the digits will always be less than 11./दो अंकों की संख्या तथा अंकों को पलटकर बनी संख्या का योगफल हमेशा 11 से divide होगा।

  $xy \rightarrow 10x+y$, $yx \rightarrow 10y+x$

  $11x+11y = 11(x+y)$
- दो अंकों की संख्या तथा अंकों को पलटकर बनी संख्या का अंतर हमेशा 9 से divide होगी

  $xy \rightarrow 10x+y, yx \rightarrow 10y+x, 9x-9y$
- 1 should be added in the product of four consecutive numbers then it always becomes a perfect square.

  चार लगातार संख्याओं के गुणनफल में 1 जोड़ा जाना चाहिए तो यह हमेशा एक पूर्ण वर्ग बन जाता है।

  Ex:-5 × 6 × 7 × 8 + 1 is a perfect square.
- $\sqrt{2}$ = 1.414
- $\sqrt{3}$ = 1.732
- $\sqrt{5}$ = 2.23
- $3^4 > 4^3$
- $4^5 > 5^4$
- $5^6 > 6^5$
- $6^7 > 7^6$
- $7^8 > 8^7$
- $8^9 > 9^8$
- $9^{10} > 10^9$...... etc.

  Note: (Exception)
- $1^2 < 2^1$
- $2^3 < 3^2$

POWER, INDICES AND SURDS
घात, घातांक एवं करणी

➢ *Let n be a positive integer and a be real number, then:*

माना n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा a एक वास्तविक संख्या है, तो–

$a^n = \dfrac{a \times a \times a \times ...... \times a}{(n\ factors)}$

a^n is called "n^{th} power of a" or "a raised to the power n"

a^n को a का $n^{वाँ}$ घात कहा जाता है। या a की घात n

where, a is called the base and n is called index or exponent of the power a^n.

जहाँ a को आधार कहा जाता है तथा n को a के n वें घात का घातांक कहा जाता है।

E.g. 3^2 = square of 3, 3^3 = cube of 3 etc.

3^2 = 3 का वर्ग, 3, 3^3 = 3 का घन आदि।

➢ ***Laws of Indices:***

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ where $a \neq 0$ and $(m, n) \in I$

   $a^m \times a^n = a^{m+n}$ जहां $a \neq 0$ तथा $(m, n) \in I$

2. $a^m \times a^n \times a^p \ .... = a^{m+n+p+.......}$

3. $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & if\ m>n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & if\ n>m \\ 1 & if\ m=n \end{cases}$

4. $(a^m)^n = a^{nm} = (a^n)^m$

5. $a^{m^n} = a^{m \times m \times ....n}$ times $\neq (a^m)^n$

6. $(ab)^n = a^n b^n$

7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$

8. $(-a)^n = \begin{bmatrix} a^n, \text{when n is even} \\ -a^n, \text{ when n is odd} \end{bmatrix}$

Remark:- These rules are also true when n is negative or fraction.

जब n एक ऋणात्मक हो या भिन्न हो, तब भी यह नियम सत्य है।

9. $a^{-n} = a^{(-1)n} = \left(a^{-1}\right)^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

   $= \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{a}$........$n$ times

10. $a^{p/q} = a^{1/q \times p} = (a^{1/q})^p$ where p, q are positive integer, $q \neq 0$

    $a^{p/q} = (a^{1/q \times p}) = (a^{1/q})^p$ जहां p, q धनपूर्णांक हैं।

    $= a^{1/q} \times a^{1/q} \times$ .... p times

➢ *If the index of a power is until (i.e. 1) then the value of the power is equal to its base, i.e.*

यदि एक घात का घातांक इकाई (i.e. 1) है, तो घात का मान इसके आधार के बराबर होगा।

$a^1 = a,\ 0^1 = 0$

- $a^m = a^n \Rightarrow m = n$ when $a \neq 0, 1$
- $a^m = b^m \Rightarrow a = b$
- **Surd:** If a is rational and n is a positive integer and $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ is
- Irrational, then $\sqrt[n]{a}$ is called a "surd of order n" or "n^{th} root of a"

For the surd $\sqrt[n]{a}$, n is called the surd-index or the order of the surd and "a" is called the radicand. The symbol '$\sqrt{\ }$ is called the surd sign or radical.

करणीः- यदि a एक धन परिमेय संख्या है जिसे किसी परिमेय संख्या के nवें घात के रूप में प्रकट नहीं कर सकते, तो अपरिमेय संख्या $\sqrt[n]{a}$ या $a^{1/n}$ अर्थात् a के धनात्मक n वें मूल को करणी कहा जाता है प्रतीक $\sqrt[n]{\ }$ को करणी चिन्ह, n को करणीघात तथा a को करणीगत (radicand) कहा जाता है।

E.g. $\sqrt{5}$ is a surd of order 2 or square root of 5.

$\sqrt{5}$ का करणी घात 2 है या 5 का वर्गमूल

$\sqrt[3]{6}$ is a surd of order 3 or cube root of 6.

$\sqrt[3]{6}$ का करणी घात 3 है या 6 का घनमूल

$\sqrt{6+\sqrt{5}}$ is not a surd as $6+\sqrt{5}$ is not a rational number.

$\sqrt{6+\sqrt{5}}$ करणी नहीं है क्योंकि $6+\sqrt{5}$ एक परिमेय *संख्या नहीं है।*

Note: Every surd is an irrational number but every irrational number is not a surd.

नोटः-प्रत्येक करणी एक अपरिमेय संख्या होती है लेकिन प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक करणी नहीं होती है।

➢ *In the surd $a\sqrt[n]{b}$, a and b are called factors of the surd.*

करणी $a\sqrt[n]{b}$, में a तथा b को करणी के गुणनखंड कहा जाता है।

(i) A surd which has unity as its rational factor (i.e. a = 1) is called "pure surd".

एक करणी जिसका परिमेय गुणनखंड इकाई हो (i.e. a = 1) "pure surd" कहलाता है।

E.g.: $\sqrt[4]{3},\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3}$ etc.

(ii) A surd which has a rational factor other than unity, the other irrational, is called "mixed surd"./ एक करणी जिसका परिमेय गुणनखंड इकाई के अलावा कुछ भी हो, अन्य अपरिमेय है तो उसे मिश्रित करणी कहते हैं।

e.g. $3\sqrt{5},\ 2\sqrt{7},\ 5\sqrt[3]{7}$

➢ *If $\sqrt[n]{a}$ is a surd it implies.*

यदि $\sqrt[n]{a}$ एक करणी है तो इसका मतलब है:

(i) a is a rational number./a एक परिमेय संख्या है।

(ii) $\sqrt[n]{a}$ is an irrational number./ $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Quadratic surd:/द्विघात करणी: A surd of order 2 (i.e. $\sqrt{a}$) is called a quadratic surd./एक करणी जिसकी घात 2 हो $(\text{i.e.}\sqrt{a})$ उसे द्विघात करणी कहते हैं।

E.g.: $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ is a quadratic surd but $\sqrt{4} = 4^{1/2}$ is not a quadratic surd because $\sqrt{4} = 2$ is a rational number. Therefore $\sqrt{4}$ is not a surd./ $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ एक द्विघात करणी है लेकिन $\sqrt{4} = 4^{1/2}$ एक द्विघात करणी नहीं है क्योंकि $\sqrt{4} = 2$ एक परिमेय संख्या है। अत: $\sqrt{4}$ एक करणी नहीं है।

Cubic Surd: A surd of order 3(i.e. $\sqrt[3]{a}$) is called a cubic surd.

घन करणी: एक करणी जिसकी घात 3 हो $(\text{i.e.}\sqrt[3]{a})$ घन करणी कहलाती है।

E.g.: $\sqrt[3]{9}$ is a cubic surd but $\sqrt[3]{27}$ is not a surd because $\sqrt[3]{27} = 3$ is a rational number.

$\sqrt[3]{9}$ एक घन करणी है लेकिन $\sqrt[3]{27}$ एक करणी नहीं है क्योंकि $\sqrt[3]{27} = 3$ एक परिमेय संख्या है।

Quartic or Biquadratic surd: A surd of order 4(i.e. $\sqrt[4]{a}$) is called a quadratic surd./एक करणी जिसकी घात 4 हो $(\text{i.e.}\sqrt[4]{a})$ एक quadratic surd कहलाती है।

E.g.: $\sqrt[4]{3}$ is a quadratic surd but $\sqrt[4]{81}$ is not a quadratic surd.

$\sqrt[4]{3}$ एक quadratic surd है लेकिन $\sqrt[4]{81}$ एक quadratic surd नहीं है।

Note: Each surd can be represented on the number line.

नोट:– प्रत्येक करणी को संख्या रेखा पर निरुपित किया जा सकता है।

Important Formulae Based on Surds:
करणी पर आधारित महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$

(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ and $\frac{k\sqrt[n]{a}}{l\sqrt[n]{b}} = \frac{k}{l}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(iv) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(v) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = (a)^{m/n} = \left(a^m\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$

(vi) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

(vii) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(viii) $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

(ix) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

(x) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

(xi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$, where a and b are positive rational numbers./a और b धनात्मक परिमेय संख्यायें हैं।

➢ *A surd is in its simplest form if:*

कोई करणी अपने सरलतम रुप में तब होती है जब–

(i) There is no factor which has n^{th} power of a rational number, under the radical sign whose index is n, करणीघात n के करणी चिन्ह के अन्दर करणीगत का कोई गुणनखंड, किसी परिमेय संख्या का nवाँ घात न हो।

(ii) There is no fraction under the radical sign, and/ करणी चिन्ह के नीचे कोई भिन्न न हो।

(iii) The index of the surd is the smallest possible./ करणी का करणीघात यथासंभव छोटा हो।

E.g. The surd $\sqrt[4]{3 \times 5^4}$ is not in its simplest form since the number under the radical sign has factor 5^4 s.t. its index is equal to the order of the surd. It simplest form:/करणी $\sqrt[4]{3 \times 5^4}$ अपने सरलतम रुप में नहीं है क्योंकि करणी चिन्ह के अन्दर संख्या का गुणनखंड 5^4 है, जिसका घातांक करणी की घात के बराबर है। इसका सरलतम रुप है–

$\sqrt[4]{3 \times 5^4} = \sqrt[4]{3}.\ \sqrt[4]{5^4} = \left(\sqrt[4]{3}\right)(5) = 5.\ \left(\sqrt[4]{3}\right)$

Similar or like Surds: Surds having same irrational factors are called "similar or like surd".

समरुप करणियाँ:– जिन करणियों के समान अपरिमेय गुणनखंड हों उन्हें समरुप करणियाँ कहते हैं।

E.g.: $3\sqrt{3},\ 7\sqrt{3},\ \frac{2}{5}\sqrt{3},\ \sqrt{3}$ etc. are similar surds./आदि समरुप करणियाँ हैं।

Unlike surds:– Surds having non-common irrational factors are called "unlike surds".

विषमरुप करणियाँ:– जिन करणियों में कोई उभयनिष्ठ अपरिमेय गुणनखंड न हो उन्हें विषम करणियाँ कहते हैं।

E.g.: $3\sqrt{3},\ 5\sqrt{2},\ 6\sqrt{7}$, etc. are unlike surds./आदि विषमरुप करणियाँ हैं।

Comparison of Surds:/करणियों की तुलना (i) If two surds are of the same order, then the one whose radicand is larger, is the larger of the two./ यदि दो करणियाँ समान करणीघात हैं तो जिसका करणीघात बड़ा है वही करणी बड़ी होगी।

E.g.: $\sqrt[3]{19} > \sqrt[3]{15},\ \sqrt{7} > \sqrt{5},\ \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{7}$ etc.

(ii) If two surds are **distinct order,** we change them into the surds of the same order. This order is the L.C.M. of the orders of the given surds.

यदि करणियाँ एक ही करणीघात न हों तो सर्वप्रथम उन्हें परिवर्तित करके एक ही करणीघात की बनानी होती है इसके लिए दी गई करणीघातों का लघुत्तम समापवर्त्य निकालते हैं एवं प्रत्येक करणी को प्राप्त लघुत्तम समापवर्त्य के करणी घात में परिवर्तित कर तुलना की जाती है।

E.g.: Which is larger $\sqrt{2}$ of $\sqrt[3]{3}$?/में से कौन-सी बड़ी है।

Sol. Given surds are of order 2 & 3 respectively whose L.C.M is 6.

दी गई करणियों की घात क्रमश: 2 तथा 3 है जिसका L.C.M 6 है।

Convert each into a surd of order 6, as show below :

प्रत्येक को घात 6 की करणी में बदलने पर,

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}} = 2^{3/6} = \left(2^3\right)^{1/6} = (8)^{1/6} = \sqrt[6]{8}$$

$$= 3^{1/3} = 3^{\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}} = 3^{2/6} = (9)^{1/6} = \sqrt[6]{9}$$

Clearly, $\sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$, so $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

Rationalisation of Surds: If the product of two surds is rational, then each of them is called the (R.F.) rationalising factor of the other./**करणियों का परिमेयकरण:** यदि दो करणियों का गुणनफल एक परिमेय संख्या हो, तो उनमें से प्रत्येक को, एक-दूसरे का परिमेयकारी गुणनखण्ड कहा जाता है।

E.g.: $5\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 5\sqrt{7\times 7} = 5 \times 7 = 35$

$\therefore$ $\sqrt{7}$ is a rationalising factor of $5\sqrt{7}$ ./का परिमेयकारी गुणनखण्ड $\sqrt{7}$ है।

- Rationalising factor (R.F) of the surd $\sqrt[n]{a}$ is $a^{1-\frac{1}{n}}$ / करणी $\sqrt[n]{a}$ का परिमेयकारी गुणनखण्ड $a^{1-\frac{1}{n}}$ है।
- R.F. of the surd $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ is $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ ./करणीका $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ परिमेयकारी गुणनखण्ड $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ है।

E.g.: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 = 1$

$\therefore$ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ is a R.F. of $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

करणी $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ का परिमेयकारी गुणनखण्ड $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ है।

Note: The R.F. of a given surd is not unique.

नोट:- एक दी गई करणी का परिमेयकारी गुणनखण्ड एकमात्र (unique) नहीं होता है।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(a) If $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\infty}}}$

then, $y = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$

Note: If $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\infty}}}$ and x = n(n + 1) then y = (n + 1)

(b) If $y = \sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\ldots\ldots\infty}}}$

then $y = \dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$

Note: if $y = \sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\ldots\ldots\infty}}}$

and $x = n(n+1)$ then $y = n$

(c) If $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{a}\ldots\ldots\infty}}}$ then y = a

(d) If $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{a}\ldots\ldots n}}}$, then $y = a^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

(e) If $y = \left(\sqrt[m]{\left(\sqrt[p]{a^x}\right)^z}\right)^n$, then $y = a^{\left(\frac{x\times z\times n}{m\times p}\right)}$

(f) $\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\ldots\ldots\ldots\infty}}}} = \sqrt[n-1]{a}$

(g) $\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\ldots\ldots\ldots\infty}}}} = \sqrt[n+1]{a}$

(h) $\sqrt{a+b\sqrt{a+b\sqrt{a+\ldots\ldots\ldots\infty}}} = \dfrac{\sqrt{4a+b^2}+b}{2}$

(i) $\sqrt{a-b\sqrt{a-b\sqrt{a-\ldots\ldots\ldots\infty}}} = \dfrac{\sqrt{4a+b^2}-b}{2}$

(j) $\sqrt{a+b\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-\ldots\ldots\ldots\infty}}}} = \dfrac{\sqrt{4a-3b^2}+b}{2}$

(k) $\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-b\sqrt{a+\ldots\ldots\ldots\infty}}}} = \dfrac{\sqrt{4a-3b^2}-b}{2}$

(l) $\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\ldots\ldots\ldots\infty}}}} = \dfrac{\sqrt{4a-3}+1}{2}$

(m) $\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\ldots\ldots\ldots\infty}}}} = \dfrac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$

Square-root of an Irrational number:/अपरिमेय संख्याओं का वर्गमूल

As we know that/जैसा कि हम जानते हैं कि,

$(a+b)^2 = (a^2+b^2)+2ab$

$$\therefore \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \underbrace{5}_{(a^2+b^2)} + \underbrace{2\sqrt{6}}_{(2ab)}$$

$$\therefore 5+2\sqrt{6} = \underbrace{5+2\sqrt{2}\sqrt{3}}_{(2ab)}$$

$\therefore$ a = $\sqrt{2}$ & $b = \sqrt{3}$

& $a^2 + b^2 = 5$

$$\therefore 5+2\sqrt{6} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a+b = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Useful Result/महत्वपूर्ण परिणाम

(a) If $x = \dfrac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\frac{x+2\sqrt{a}}{x-2\sqrt{a}} + \frac{x+2\sqrt{b}}{x-2\sqrt{b}} = 2$$

(b) If $= x\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\frac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{a}} + \frac{x+\sqrt{b}}{x-\sqrt{b}} = 2$$

Note: In these type of questions there is maximum possibility of having answer '2'./**नोट:**- इस प्रकार के प्रश्नों में उत्तर '2' आने की संभावना ज्यादा होती है।

SIMPLIFICATION
सरलीकरण

CHAPTER
22

- **BODMAS Rule:**

  V $\rightarrow$ Vincullum (रेखा कोष्ठक)
  B $\rightarrow$ Bracket (कोष्ठक)
  O $\rightarrow$ of (का)
  D $\rightarrow$ Division (भाग)
  M $\rightarrow$ Multiplication (गुणा)
  A $\rightarrow$ Addition (जोड़)
  S $\rightarrow$ Subtraction (घटाव)

Note:- कोष्ठक भी चार प्रकार के होते हैं,

(i) —— $\rightarrow$ Line bracket/ Bar bracket (रेखा कोष्ठक)

(ii) ( ) $\rightarrow$ Circular bracket/Simple or small bracket/open bracket (छोटा कोष्ठक)

(iii) { } $\rightarrow$ Curly bracket/Braces (मंझला कोष्ठक)

(iv) [ ] $\rightarrow$ Square bracket/closed bracket (बड़ा कोष्ठक)

- *Series Formulae:-*

- $\frac{1}{a\times b} = \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$
- $\frac{1}{a\times b\times c} = \frac{1}{(c-a)}\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right]$
- $\frac{1}{a\times b\times c\times d} = \frac{1}{(d-a)}\left[\frac{1}{abc}-\frac{1}{bcd}\right]$
- If series is $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+......+$ then

Sum= $\frac{1}{\text{difference of terms}}\left[\frac{1}{\text{first term}}-\frac{1}{\text{last term}}\right]$

- If series is $\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+........,$

  Sum $=\frac{1}{2\times\text{diff. of two term}}\left[\frac{1}{\text{first two term}}-\frac{1}{\text{last two term}}\right]$

- If series is $\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}+\frac{1}{3\times 4\times 5\times 6}+$ ......then
- Sum= $\frac{1}{3\times\text{diff. of term}}\left[\frac{1}{\text{first three terms}}-\frac{1}{\text{last three terms}}\right]$
- $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+..........+n(n+1)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+..........+n(n+1)(n+2)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

- **Componendo and Dividendo Rule/योगान्तरानुपात का नियम**

- If $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{x+y}{x-y}$

  again spply C & D

  $\frac{a+b+a-b}{a+b-(a-b)} = \frac{x+y+x-y}{x+y-(x-y)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Note: If we apply C & D two times on a fraction, same fraction is achieved.

- If $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ then $\sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ and $\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
- If $x = \frac{2ab}{b^2+1}$ & b > 0 then $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$
- If $x = \frac{2ab}{a+b}$ then $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b} = 2$ and x

$= \frac{4ab}{a+b}$ then $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{2(a+b)}{a-b}$
- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{ab}}{a-b}$
- $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = 4\sqrt{xy}$
- If $x \times y = 1$ then $\frac{1}{x^n+1}+\frac{1}{y^n+1} = 1$

Find square root

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $\sqrt{13+4\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}+1\right)^2$

$13 + 4\sqrt{3}$

$a^2 + b^2$ $2ab$

$12 + 1$ $2\times2\sqrt{3}\times 1$

$(2\sqrt{3})^2 + (1)^2$

- $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 3 + 2 \times 2\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$

- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1} = A\sqrt[3]{a^2} + B\sqrt[3]{a} + C$

  ↓ ↓ ↓

  $O \quad \dfrac{1}{a+1} \quad \dfrac{1}{a+1}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1} = A\sqrt[3]{a^2} + B\sqrt[3]{a} + C$

↓ ↓ ↓

$O \quad \dfrac{1}{a-1} \quad \dfrac{-1}{a-1}$

How to find conjugate

अगर वर्ग का अंतर '1' है तो conjugate में सिर्फ चिन्ह में परिवर्तन होगा और यदि अंतर '1' नही होता तो वर्ग के अंतर से भाग दे।

Ex. $x = 5+2\sqrt{6}$ then $\dfrac{1}{x} = 5-2\sqrt{6}$

Rationalising factors of the surds

$x = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ and $\dfrac{1}{x} = \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

Here difference between a and b is "1"

यहाँ a और b के बीच का अंतर "1" है

ALGEBRA बीजगणित — CHAPTER 23

ALGEBRIC IDENTITIES

An algebric identity is an algebric equation which is true for all values of the variables.

SQUARE FORMULAS

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
5. $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
6. $(nx + my)^2 + (mx - ny)^2 = (m^2 + n^2)(x^2 + y^2)$
7. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
8. $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{4ab}{a^2-b^2}$
9. $(nx + my)^2 - (mx - ny)^2 = 4mnxy$
10. $(a^2 - b^2)^2 = a^4 + b^4 - 2a^2b^2$
11. $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
12. $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
13. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab$
14. $ab = \dfrac{1}{4}[(a + b)^2 - (a - b)^2]$

    $= \dfrac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$

    $= \dfrac{1}{2}[(a^2 + b^2) - (a - b)^2]$
15. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2$
16. $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

    $= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
17. $a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$
18. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = \dfrac{a^6-b^6}{a^2-b^2}$

Ex:– (i) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

(ii) $a^2 + ab + b^2 = \left(a+b+\sqrt{ab}\right)\left(a+b-\sqrt{ab}\right)$

19. If $a^2 + ab + b^2 = x$ & $a^2 - ab + b^2 = y$ then

    $a^2 + b^2 = \dfrac{x+y}{2}$ and $ab = \dfrac{x-y}{2}$
20. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
21. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
22. $ab + bc + ca = \dfrac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$
23. $(a+b+c)^2 = \dfrac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

    $+ 6(ab + bc + ca)$
24. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

    $= \dfrac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$
25. If a, b, c are in AP with common difference "D", then

    $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{1}{2}[D^2 + D^2 + (2D)^2] = 3D^2$
26. If $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ then $a = b = c$

    or

    $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

27. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

CUBE FORMULAS

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
2. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
   $= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
3. $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2)$
4. $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2)$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
   $= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
   $= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$
6. $(a^2 - ab + b^2) = \dfrac{a^3 + b^3}{a + b}$
7. $(a + b) = \dfrac{a^3 + b^3}{\left(a^2 - ab + b^2\right)}$
8. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
   $= (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
   $= (a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$
9. $(a^2 + ab + b^2) = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$
10. $(a - b) = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab}$
11. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
    $= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
    $= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)]$
    $= \dfrac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$
    $= \dfrac{1}{2}(a + b + c)[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2]$
12. $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} = \dfrac{a + b + c}{2}$
13. If $a + b + c = 0$, then $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
    or
    $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
14. If $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ then either of the two reasons is possible
    (i) $a + b + c = 0$; a, b, c are distinct integers
    (ii) $a = b = c$; a, b, c are positive intergers
15. If a, b, c are in AP with common difference 'D' then $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bD^2$
16. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$
    $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)] + 2abc$
17. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$
18. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
19. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

SOME SPECIAL CASES

1. If $a^2 - ab + b^2 = 0$ then $a^3 + b^3 = 0$
2. If $b = 1$, then $a^2 - a + 1 = 0$
   $a^3 + 1 = 0$
   $a^3 = -1$
3. If $a^2 + a + 1 = 0$, then $a^3 - 1 = 0$ and $a^3 = 1$
4. If $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 1$, then $a^3 + b^3 = 0$
5. If $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a - b}$ then $a^3 + b^3 = 0$
6. If $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = -1$ then $a^3 - b^3 = 0$
7. If $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{a + b}$ then $a^3 - b^3 = 0$
8. If $ab(a + b) = 1$ then $\dfrac{1}{a^3b^3} - a^3 - b^3 = 3$

PARALLEL POWER FORMULA

1. If $x^n + \dfrac{1}{x^n} = K$, then $x^n - \dfrac{1}{x^n} = \pm\sqrt{K^2 - 4}$
2. If $x^n - \dfrac{1}{x^n} = K$, then $x^n + \dfrac{1}{x^n} = \pm\sqrt{K^2 + 4}$
3. If $\dfrac{x + y}{\sqrt{xy}} = a$, then $\dfrac{x - y}{\sqrt{xy}} = \pm\sqrt{a^2 - 4}$
4. If $\dfrac{x - y}{xy} = a$, then $\dfrac{x + y}{\sqrt{xy}} = \pm\sqrt{a^2 + 4}$
5. If $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = a$, then $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \sqrt{a^2 - 4}$
6. If $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = a$, then $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \sqrt{a^2 + 4}$

➢ **If x and $\dfrac{1}{x}$ are present with their variables other than '1'**

1. If $(ax)^n + \left(\dfrac{b}{cx}\right)^n = k$ then
   $(ax)^n - \left(\dfrac{b}{cx}\right)^n = \pm\sqrt{k^2 - 4 \times a^n \times \dfrac{b^n}{c^n}}$
2. If $(ax)^n - \left(\dfrac{b}{cx}\right)^n = k$ then $(ax)^n + \left(\dfrac{b}{cx}\right)^n$
   $= \pm\sqrt{k^2 + 4 \times a^n \times \dfrac{b^n}{c^n}}$

POWER 2 FORMULAS

1. If $x+\frac{1}{x}$ = K, then $x^2+\frac{1}{x^2}$ = $K^2 - 2$

2. If $x-\frac{1}{x}$ = K, then $x^2+\frac{1}{x^2}$ = $K^2 + 2$

3. If $x+\frac{1}{x} = \pm\sqrt{2}$, then $x^2+\frac{1}{x^2} = 0$ and $\boxed{x^4 = -1}$

   Power difference 4 makes result in zero

Ex. (i) $x^4 + x^\circ = 0$ (ii) $x^{96} + x^{100} = 0$

4. If $x^2+\frac{1}{x^2}$ = K, then

   (i) $x+\frac{1}{x} = \pm\sqrt{k^2+2}$

   (ii) $x-\frac{1}{x} = \pm\sqrt{k^2-2}$

➤ **If x and $\frac{1}{x}$ present with their variables other than '1'**

1. If $ax+\frac{b}{cx}$ = K, then $(ax)^2 + \left(\frac{b}{cx}\right)^2 = K^2 - 2 \times a \times \frac{b}{c}$

2. If $ax-\frac{b}{cx}$ = K, then $(ax)^2 + \left(\frac{b}{cx}\right)^2 = K^2 + 2 \times a \times \frac{b}{c}$

POWER 3 FORMULAS

1. If $x+\frac{1}{x}$ = K, then $x^3+\frac{1}{x^3}$ = $K^3 - 3K$

2. If $x-\frac{1}{x}$ = K, then $x^3-\frac{1}{x^3}$ = $K^3 + 3K$

3. If $x-\frac{1}{x} = \sqrt{K}$, then $x^3-\frac{1}{x^3} = (K + 3)\ \sqrt{K}$

4. If $x+\frac{1}{x} = \sqrt{K}$, then $x^3+\frac{1}{x^3} = (K-3)\sqrt{K}$

Ex. If $x+\frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$ then $x^3+\frac{1}{x^3} = 0$ and $\boxed{x^6 = -1}$

Power difference 6 makes result in zero

Ex.(i) $x^6 + x^\circ = 0$ (ii) $x^{96} + x^{102} = 0$

➤ **If x and $\frac{1}{x}$ present with their variable other than '1'**

1. If $ax + \frac{b}{cx}$ = K then $(ax)^3 + \left(\frac{b}{cx}\right)^3 = K^3 - 3K \times a \times \frac{b}{c}$

2. If $ax - \frac{b}{cx}$ = K then $(ax)^3 - \left(\frac{b}{cx}\right)^3 = K^3 + 3K \times a \times \frac{b}{c}$

POWER 4 FORMULAS

1. $x^4+\frac{1}{x^4} = \left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]^2 - 2$

2. $x^4-\frac{1}{x^4} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$

POWER 5 FORMULAS

1. $x^5+\frac{1}{x^5} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

   If $x+\frac{1}{x}$ = K then $x^5+\frac{1}{x^5}$

   $= (K^2 - 2)\ (K^3 - 3K) - K$

2. $x^5-\frac{1}{x^5} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$

   If $x-\frac{1}{x}$ = K then $x^5-\frac{1}{x^5} = (K^2+2)\ (K^3+3K) - K$

POWER 7 FORMULAS

1. $x^7+\frac{1}{x^7} = \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

   If $x+\frac{1}{x} = K$ then $x^7+\frac{1}{x^7} =$

   $\left[\left\{\left(K^2-2\right)^2-2\right\}\left(K^3-3K\right)\right]-K$

2. $x^7-\frac{1}{x^7} = \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)$

   If $x-\frac{1}{x}$ = K then $x^7-\frac{1}{x^7}$ =

   $\left[\left\{\left(K^2+2\right)^2-2\right\}\left(K^3+3K\right)\right]+K$

POWER 8 FORMULAS

1. $x^8+\frac{1}{x^8} = \left[\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-2\right]^2-2$

2. $x^8-\frac{1}{x^8} = \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$

$x+\frac{1}{x}$	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x-\frac{1}{x}$	$\sqrt{k^2-4}$	0	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{21}$	$4\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{77}$	$4\sqrt{6}$
$x^2+\frac{1}{x^2}$	k^2-2	2	7	14	23	34	47	62	79	98
$x^3+\frac{1}{x^3}$	k^3-3k	2	18	52	110	198	322	488	702	970
$x^5+\frac{1}{x^5}$	$(k^2-2)(k^3-3k)-k$	2	123	724	2525	6726	15127	30248	55449	95050
$x^7+\frac{1}{x^7}$	$[\{(k^2-2)^2-2\}(k^3-3k)-k]$	2	843	10084	57965	228486	710647	1874888	4379769	9133930

$x-\frac{1}{x}$	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x+\frac{1}{x}$	$\sqrt{k^2+4}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{29}$	$2\sqrt{10}$	$\sqrt{53}$	$2\sqrt{17}$	$\sqrt{85}$	$2\sqrt{26}$
$x^2+\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{k^2+2}$	6	11	18	27	38	51	66	83	102
$x^3-\frac{1}{x^3}$	k^3+3k	14	36	76	140	234	364	536	756	1030
$x^5-\frac{1}{x^5}$	$(k^2+2)(k^3+3k)-k$	82	393	1364	3775	8886	18557	35368	62739	105050
$x^7-\frac{1}{x^7}$	$[\{(k^2+2)^2-2\}(k^3+3k)+k]$	478	4287	24476	101785	337434	946043	2333752	5206581	10714070

- If $x+\frac{1}{x}=1$ or $x^2-x+1=0$

  then $\boxed{x^3=-1}$

  "Sum of two terms of the variable in zero if their power difference is "3"

Ex. (i) $x^3+x^{\circ}=0$

(ii) $x^{96}+x^{99}=0$

- If $x+\frac{1}{x}=-1$ or $x^2+x+1=0$

  then $\boxed{x^3=1}$

  Difference of two terms of variable in zero if their power different is "3"

Ex. (i) $x^3-x^{\circ}=1$

(ii) $x^{96}-x^{99}=0$

- If $x+\frac{1}{x}=2$ then x = 1
- If $x+\frac{1}{x}=2$ then x = – 1
- If $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=2$ Or $x+\frac{a^2}{x}=2a$ then x = a

- *Degree of Equation/समीकरण की कोटि*

  Maximum power of a variable is called degree of a polynomial.

Ex. (i) $x^4+x^3+1 \Rightarrow$ degree = 4

(ii) $x^3+1+x^2 \Rightarrow$ degree = 3

- *Homogeneous Expression/समघातीय व्यंजक*

  A homogeneous expression is a expression in which all its terms are of the same degree.

Ex. (i) → homogenous expression

$a^1b^1+b^1c^1+c^1a^1 \rightarrow$ degree = 2

(ii) $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \rightarrow$ degree = $\frac{2}{1}$ = 1

***Note:**– In a homogeheous expression degree of answer will be same as degree of answer.*

Ex.(i) $\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}=?$

(numerators: 3 + 1; denominators: 1 + 1)

(a) a+b+c (b) abc

(c) ab+bc+ca (d) 3

Solution:–

degree = $\frac{4}{2}$ = 4 – 2 = 2

Degree of each terms are same so this expression is homogenous having degree '2' so answer must have '2' degree expression

In option (A) degree = 1

Option (B) degree = 3

Option (C) degree = 2 so option (c) is my answer.

(ii) $\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=?$

(numerator degree 1 + 2 each; denominator factors degree 1, 1)

Degree

(a) a+b+c ⟶ 1

(b) 3 ⟶ 0

(c) $a^2+b^2+c^2$ ⟶ 2

(d) abc ⟶ 3

Solution:-

It is a homogeheous expresion

having degree $\frac{3}{2}$ = 3 – 2 = 1

so my answer is option (A)

(iii) $(bc + ca + ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3 = ?$

Degree

(a) 3abc (a+b) (b+c) (c+a) → 6

(b) (a+b) (b+c) (c+a) → 3

(c) (a–b) (b–c) (c–a) → 3

(d) 24abc → 3

Solution:-

It is a homogeneous polynomial having degree = 6 so my answer is option (a)

➢ **If $\boxed{a+b+c=0}$ then**

1. $\frac{1}{(a+b)(b+c)}+\frac{1}{(a+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=0$

2. $\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}=0$

3. $\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)=0$

4. $\frac{a^2+b^2+c^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\frac{1}{3}$

5. $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$

6. $\frac{a^2}{a^2-bc}+\frac{b^2}{b^2-ca}+\frac{c^2}{c^2-ab}=2$

7. $\frac{(a^4+b^4+c^4)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}=2$

8. $\frac{2a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{2b^2}{a^2+c^2-b^2}+\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}=-3$

9. $\frac{3b^2+a^2+c^2}{2b^2-ab}=2$

10. $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2-bc}=2$

11. $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$

Some important results for exams

1. $(x^2 + ax + bx + ab) = (x + a)(x + b)$
2. $1 + A + B + AB = (1 + A)(1 + B)$
3. $(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$
4. If xy = 1 or $x=\frac{1}{y}$ then $\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{1+y^n}=1$
5. If a+b+c = 2s then
$\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2}{a^2+b^2+c^2}=1$
6. If xy + yz + zx = 0 then
$\left(\frac{1}{x^2-yz}+\frac{1}{y^2-zx}+\frac{1}{z^2-xy}\right)=0$
7. If pq + qr + rp = 0 then
$\left(\frac{P^2}{P^2-qr}+\frac{q^2}{q^2-rp}+\frac{r^2}{r^2-pq}\right)=1$
8. If $\left[\sqrt{a^2+b^2+ab}+\sqrt{a^2+b^2-ab}\right]=1$, then $(1-a^2)(1-b^2)=\frac{3}{4}$
9. If $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$, where x and y are real numbers then $(x + y)^2 = 0$
10. $\frac{x^4}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}+\frac{y^4}{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}+\frac{z^4}{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}=1$
11. If a + b + c = abc then
$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab}+\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc}+\frac{(1-c^2)(1-a^2)}{ca}=4$

12. If ab + bc + ca = abc then

$$\frac{b+c}{bc(a-1)}+\frac{c+a}{ca(b-1)}+\frac{a+b}{ab(c-1)} = 1$$

13. If xy + yz + zx = 1 then $\left(\frac{x+y}{1-xy}+\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-xz}\right)$

$= \frac{1}{xyz}$

14. If $x=\frac{a-b}{a+b}, y=\frac{b-c}{b+c}, z=\frac{c-a}{c+a}$ then

$$\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x)(1+y)(1+z)} = 1$$

15. If $x^2 + y^2 = z + 1, y^2 + z^2 = x + 1, z^2 + x^2 = y + 1$ then

xyz = 1 or $-\frac{1}{8}$

16. (b+c) (c+a) (a+b) + abc = (a+b+c) (ab + bc + ca)
17. a (b–c) + b (c–a) + c (a–b) = 0
18. ab (a – b) + bc (b – c) + ca (c – a) = – (a – b) (b – c) (c – a)
= a^2 (b – c) + b^2 (c – a) + c^2 (c – a)
19. a ($b^2 - c^2$) + b ($c^2 - a^2$) + c ($a^2 - b^2$) = (a–b) (b–c) (c–a)
20. a^3 (b – c) + b^3 (c – a) + c^3 (a – b)
= – (b – c) (c – a) (a – b) (a + b + c)
21. (a + b + c) (ab + bc + ca) – abc
= (a + b) (b + c) (c + a)
22. (a + b + c) (ab+ bc + ca) – 3abc
= a^2 (b + c) + b^2 (c + a) + c^2 (a + b)

23. If $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$, where $a \neq b \neq c$ then abc = ± 1

24. $$\frac{(x-y)^2}{(y-z)(z-x)}+\frac{(y-z)^2}{(z-x)(x-y)}+\frac{(z-x)^2}{(x-y)(y-z)}=3$$

25. If p × q × t = 1

then, $\frac{1}{1+p+q^{-1}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}=1$

26. If $\frac{2p}{p^2-2p+1}=\frac{1}{4}$ then, $p+\frac{1}{p}=10$

VALUE PUTTING CONCEPT IN ALGEBRA

➢ If $x+y=5$

x	y
↓	↓
5	0
4	1
3	2

We can not find exact value of x & y
हम x और y का निश्चित मान ज्ञात नहीं कर सकते।
but 4 (x + y) = 4 × 5 = 20
means → The value of 4 (x+y) depends upon (x+y) not upon x & y
मतलब→ 4 (x + y) का मान (x + y) पर निर्भर करता है न कि x & y पर।

Note:– If there are two variables in any equation, then it in necessary to have two equation to find both those values.
यदि किसी भी समीकरण मे दो Variable है तो उन दोनो variable को ज्ञात करने के लिए दो समीकरण का होना आवश्यक है।

i.e x + y = 5
x – y = 3
x = 4, y = 1

➢ If only x + y = 5 (one equation) is given then we can fix either of the variables so that other variable is unfix and we can assume this anything according to us and assumling value must satisfy the given equation.

यदि सिर्फ x + y = 5 (एक समीकरण) दिया है तो हम इससे किसी एक variable को fix मान सकते है। जिससे दूसरा variable unfix होगा इस unfix variable को हम स्वयं से कुछ भी assume कर सकते है और यह मान समीकरण को संतुष्ट करना चाहिए।

Caution → Pay speical attention that the expression whose value asked should not be in the form of $\frac{\text{Something}}{0}$ and $\frac{0}{0}$.

सावधानी:- इस बात का विशेष ध्यान दे कि जिस expression की value पूछी गयी है वह $\frac{\text{Something}}{0}$ और $\frac{0}{0}$ का form न बनाये।

➢ If two equation are given then the value of two variables will be fixed and remaining all other variables will be unfix which we can assume anything
यदि दो समीकरण दिया गया हो तो दो variable का मान fix होगा तथा शेष अन्य सभी variable unfix होगा जिसे हम कुछ भी assume कर सकते है।

➢ If three equation are given then the value of three variables will be fixed and remaining all other variables will be unfix which we can assume anything
यदि तीन equation दिया गया हो तो तीन variable का मान fix होगा तथा शेष अन्य सभी variable unfix होगा जिसे हम कुछ भी assume कर सकते है।

Example:-

(i) If $P - 2q = 4$, find $P^3 - 8q^3 - 24pq - 64 = ?$

Sol. यहां पर एक समीकरण दिया गया है। और Variable है अत: 1 variable fix होगा तथा दूसरा variable unfix.

Unfix variable को हम स्वयं से कुछ भी assume कर सकते है।

$P \rightarrow$ fix

$q \rightarrow$ unfix let $q = 0$

then, $P = 4$

$P^3 - 8q^3 - 24\,pq - 64 = P^3 - 64 = 0$

(ii) If $a + b + c = 6$ & $ab + bc + ca = 11$ then find $bc\,(b+c) + ca\,(c+a) + ab\,(a+b) + 3abc = ?$

Sol. Here two equation and three variables are given so two variables are fix and one variable is unfix. We assume unfix variable according to us

$a \rightarrow$ fix

$b \rightarrow$ fix

$c \rightarrow$ unfix let $c = 0$

then, $a + b = 6$, $ab = 11$

$bc\,(b+c) + ca\,(c+a) + ab\,(a+b) + 3abc$

$= ab\,(a+b) = 11 \times 6 = 66$

(iii) If $(a+b+c) = 0$ then find $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{b^2-ca} = ?$

Sol. Here one equation and three variables are given so one variable is fix and 2 variable are unfix

$a \rightarrow$ fix

$b \rightarrow 0$

$c \rightarrow 0$

then $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{b^2-ca}$ $\dfrac{O}{O}$ formed

(we have to avoid $\dfrac{\text{Something}}{O}$ and $\dfrac{O}{O}$ form)

Again put,

$b = +1$ $a + b + c = 0$

$c = -1$ $a = 0$

then $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{b^2-ca} = \dfrac{b^2+c^2}{b^2} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

Some such equations which are asked again and again, we can keep the value of its variable in this way

कुछ ऐसे समीकरण जो बार-बार पूछे जाते है हम उसके चर की वैल्यू इस प्रकार रख सकते है।

1. $a + b = 0$

a	b
–1	+1
0	0
–2	+2

2. $a + b + c = 0$

a	b	c
–1	+1	0
0	–1	+1
+1	0	–1

3. $a^2 + b^2 = 2ab$
   put $a = b$

4. $a^3 + b^3 + c^3 = 2abc$
   put $a = b = c$

5. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$
   put $a = b = c = d$

6. If $a^2 + b^2 + c^2 = 0$
   then, $a = 0$
   $b = 0$
   $c = 0$

7. If $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$
   then, $x = a$
   $y = b$
   $z = c$

MAXIMUM AND MINIMUM IN ALGEBRA

➢ **Maximum and Minimum values:–**

Concept–1

	Max.value	Min.value
odd power $\rightarrow$ $(x) \rightarrow$	$+\infty$	$-\infty$
even power $\rightarrow$ $(x^2) \rightarrow$	$+\infty$	0

Ex.(i) $10 + (x^2)$ — Max $\rightarrow +\infty$; Min $\rightarrow 0$

Min. value of $(10 + x^2) = 10 + 0 = 10$

Max. value of $(10 + x^2) = 10 + \infty = -\infty$

(ii) $10 + (x^3)$ — Max $\rightarrow -\infty$; Min $\rightarrow +\infty$

Min. value of $(10 + x^3) = 10 - \infty = -\infty$

Max. value of $(10 + x^3) = 10 + \infty = +\infty$

(iii) $10 - (x^2)$ — Max $\rightarrow +\infty$; Min $\rightarrow 0$

Min. value of $10 - x^2 = 10 - \infty = -\infty$

Max. value of $10 - x^2 = 10 - 0 = 10$

Concept – 2

If ax^2+bx+c

If $a \rightarrow +$ ve   If $a \rightarrow -$ ve

then

$\max = +\infty$

$\min = \frac{4ac - b^2}{4a}$

at $x = \frac{-b}{2a}$

then

$\max = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$\min = -\infty$

Ex.(i) $x^2 - 3x + 1$

Here coefficient of x is positive

max. value = + ∞

min. value = $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 - 9}{4} = \frac{-5}{4}$

(ii) $-x^2 + 5x + 25$

Here coefficient of x is negative

mix. value = $-\infty$

max. value = $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-100 - 25}{-4} = \frac{125}{4}$

Concept – 3

If a, b are positive number then,

AM $\geq$ GM

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

AM $\rightarrow$ Arithmatic Mean

GM $\rightarrow$ Geometric Mean

Ex.(i) If x is a real no. then minimum value of

$x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

AM $\geq$ GM

$\frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$

x^2 & $\frac{1}{x^2}$ are the no. because x is real

$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

Min. value = 2

Note:-

- If a is positive no. then $\boxed{a + \frac{1}{a} \geq 2} \rightarrow$ min
- If a is real no. then

$\boxed{a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2} \rightarrow$ min

$\rightarrow$ max. value = + ∞

$\boxed{a^4 + \frac{1}{a^4} \geq 2} \rightarrow$ min

Concept – 4

If x + y = a then the value of x × y will be maximum at x = y

Ex. If a, b, c, d are + we number such that a + b + c + d = 1 then find the maximum value of abcd = ?

Sol:–a+b+c+d = 1 (abcd)max.

$a=b=c=d=\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

POLYNOMIAL & QUADRATIC EQUATION
बहुपद और द्विघात समीकरण

CHAPTER 24

➤ ALGEBRAIC EXPRESSIONS

(1) *Monomial/ एकपद:–* A monomial is an algebric expression that has only one term./एकपद एक बीजगणितीय व्यंजक है जिसमें केवल एक पद होता है।

Example:– 12x, 4a, 4b, etc.

(2) *Binomial/ द्विपद:–* A binomial is an algebric expression that has two unlike terms/f}in ,d chtxf.krh; O;atd gS ftlesa nks vleku in gksrs gSA

Example:– x + y, m – 5, 3q – 2q, etc.

(3) *Trinomial/ त्रिपद:–* A trinomial is an algebric expression that has three terms in it./त्रिपद एक बीजगणितीय व्यंजक है जिसमें तीन पद होते है।

Example:– x + y + 7, $3x^2 - 5x + 2$, etc.

(4) *Polynomial/ cgqin :* An algebraic expression in the form $a_0+a_1x+a_2x^2+.....a_nx^n$, where, $a_0, a_1, a_2....a_n$, be real numbers and 'x' is a variable and 'n' belongs to natural numbers, is called a polynomial. It is generally denoted by p(x), q(x), g(x) or f(x)./$a_0+a_1x+a_2x^2+.....a_nx^n$ के रूप का एक बीजगणितीय व्यंजक, जहां $a_0, a_1, a_2....a_n$ वास्तविक संख्या और

'x' चर है और 'n' प्राकृतिक संख्या से संबंधित है। इसे p(x), q(x), g(x) or f(x) से दर्शाया जाता है।

➢ **General form of polynomial :**

$P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....a_nx^n$

where, a_0, a_1, a_2, a_3....a_n are real numbers
x is a variable n is a natural number

- *Real Polynomial/ वास्तविक बहुपद:* Let a_0, a_1, a_2,......a_n, be real numbers and 'x' is a real variable, then, f(x), $a_0+a_1 x+a_2x^2+.......+a_n x^n$ is called a real polynomial of real variable 'x' with real coefficients.
माना कि a_0, a_1, a_2,......a_n वास्तविक संख्याएं है और 'x' एक वास्तविक चर है, फिर f(x), $a_0+a_1 x+a_2x^2+.......+a_n x^n$ को वास्तविक गुणांक के साथ वास्तविक चर 'x' का वास्तविक बहुपद कहां जाता है।
- *Polynomial Equation/ cgqin lehdj.k%*
If f(x) is a polynomial, real or complex, then f(x)= 0 is called a polynomial equation./यदि f(x) एक बहुपद, वास्तविक या जटिल है, तो f(x)= 0 एक बहुपद समीकरण कहां जाता है।
- *Constant polynomial/ अचर बहुपद*
A polynomial having its highest degree zero is called a constant polynomial. It has no variables, only constant./जिस बहुपद की उच्चतर घात शून्य होती है, उसे अचर बहुपद कहते हैं। इसका कोई चर नहीं है, केवल स्थिर मान है।

Ex.f(x) = 6, g(x) = – 22, h(y) = $\frac{5}{2}$, etc.

- *Zero polynomial/ शून्य बहुपद*
The constant polynomial O or f(x) = 0 is called the zero polynomial./जब अचर बहुपद शून्य या f(x) = 0 होता हो, तो उसे शून्य बहुपद करते है।
- *Value of polynomial at a given point/ किसी दिए गए समय पर बहुपद का मान*
If P(x) is a polynomial in x and if a is any real number, then the value obtained by putting x = a in P(x) is called the value of P(x) at x = a.
The value of P(x) at x = a is denoted by P (a).
यदि P(x), a में एक बहुपद है और यदि a कोई वास्तविक संख्या है, तो x = a को P(x) में रखने पर प्राप्त मान को x = a पर P(x) का मान कहा जाता है।
x = a पर P(x) का मान P(a) द्वारा निरूपित किया जाता है।
Ex. Let P(x) = $3x^2 - 2x + 7$, then
P(2) = $[3\times(2)^2 - 2 \times 2 + 7] = [12 - 4 + 7] = 15$

➢ *Degree of Polynomial/ एक बहुपद की डिग्री:* The degree of polynomial is the highest power of the variable in a polynomial expression i.e. f(x) = $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3....+a_nx^n$, where 'x' is a variable, so degree of polynomial is 'n' if $a_n \neq 0$.
बहुपद व्यंजक में बहुपद की घात चर की उच्चतम घात होती है, जैसे f(x) = $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3....+a_nx^n$ जहां 'x' चर है, तो बहुपद की घात 'n' है, यदि a_n ¹ 0.

Type of Degree of Polynomial

(a) *Linear Polynomial/t:* A linear polynomial is a type of polynomial where the highest degree of the variable is 1.
रेखिक बहुपद एक प्रकार का बहुपद है जहां चर की उच्चतम डिग्री 1 है।

General form : $p(x) = ax+b$

Where, a and b are real numbers and $a \neq 0$.
जहां a और b वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$.

(b) *Quadratic Polynomial/ द्विघात बहुपद:* A quadratic polynomial is a type of polynomial where the highest degree of the variable is 2./द्विघात बहुपद एक प्रकार का बहुपद है जहां चर की उच्चतम घात 2 है।

General form : $p(x) = ax^2+bx+c$

Where, a, b, c are real numbers and $a \neq 0$.
जहां a, b, c वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ हो।

(c) *Cubic Polynomial/ त्रिपदीय बहुपद :*
A cubic polynomial is a type of polynomial where the highest degree of polynomial is 3./ घन बहुपद एक प्रकार का बहुपद है जहां चर की उच्चतम घात 3 है।

General form : $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

(d) *Biquadratic Polynomial/ द्विवर्गीय बहुपद:* A Biquadratic Polynomial is a type of polynomial where the highest degree of polynomial is 4.
द्विवर्गीय बहुपद एक प्रकार का बहुपद है जहां चर की उच्चतम घात 4 है।

General form : $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Where, a, b, c, d, e are real numbers and $a \neq 0$.
जहां ए इए बए कए म वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ हो।

➢ *Remainder theorem/ शेषफल प्रमेय*
It a polynomial f(x) of degree n > 1, is divided by (x – a), then the remainder is f(a)/यदि घात n > 1 का एक बहुपद f(x) को (x – a) से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल f(a) होता है।
Ex. Let f(x) = $x^3 + 3x^2 - 5x + 4$ be divided by (x – 1).

Find the remainder.
Sol. Remainder = f(1)
= $(1)^3 + 3 \times (1)^2 - 5 \times 1 + 4 = 3$

IMPORTANT RESULTS:

(i) $(x^n - a^n)$ is divisible by $(x - a)$ for all values of n.

$(x^n - a^n)$, n के सभी मानों के लिए $(x - a)$ से विभाज्य है।

(ii) $(x^n + a^n)$ is divisible by $(x + a)$ only when n is odd.

$(x^n + a^n)$ केवल $(x + a)$ से विभाज्य है जब n विषम हो।

(iii) $(x^n - a^n)$ is divisible by $(x + a)$ only for even values of n.

$(x^n - a^n)$ केवल n के सम मानों के लिए $(x + a)$ से विभाज्य है।

(iv) $(x^n + a^n)$ is never divisible by $(x - a)$.

$(x^n + a^n)$ कभी भी $(x - a)$ से विभाज्य नहीं होता।

➤ *Factor Theorem/ xq.kt izes;*

The condition that $(x - a)$ is factor of a polynomial f(x), if and only if f(a) = 0

Thus, $(x - a)$ is a factor of f(x) $\Rightarrow$ f(a) = 0

शर्त यह है कि $(x - a)$ बहुपद f(x) का गुणनखंड है, यदि और केवल यदि f(a) = 0,

इस प्रकार, $(x - a)$, f(x) का एक कारक है, जहाँ f(a) = 0

Remarks/टिप्पणियां

(i) $(x + a)$ is a factor of polynomial p(x) if and only if p(–a) = 0

$(x + a)$ बहुपद p(x) का गुणनखण्ड है यदि और केवल यदि p (–a) = 0.

(ii) (ax –b) is a factor of a polynomial p(x), if $P\left[\frac{b}{a}\right] = 0$

(ax –b) बहुपद p(x) का गुणनखण्ड है, यदि $P\left[\frac{b}{a}\right] = 0$ है।

(iii) (ax + b) is a factor of a polynomial p(x), if $P\left[-\frac{b}{a}\right] = 0$

(ax + b) बहुपद p(x) का गुणनखण्ड है, यदि $P\left[-\frac{b}{a}\right] = 0$ है।

(iv) $(x - a)$ $(x - b)$ are factors of a polynomial p(x) if p(a) = 0 and P(b) = 0.

$(x - a)$ $(x - b)$ बहुपद p(x) के गुणनखंड है यदि p(a) = 0 और P(b) = 0.

➤ *HCF & LCM of polynomials/ बहुपद का HCF और LCM*

Divisor:– A polynomial p(x) is called a divisor of another polynomial f(x) = p(x) × g(x) for some polynomial g(x).

एक बहुपद p(x) को दूसरे बहुपद f(x) = p(x) × g(x) को कुछ बहुपद g(x) के लिए भाजक कहा जाता है।

➤ *HCF of polynomials/ cgqin dk HCF:* A polynomial h(x) is called the HCF of two or more given polynomials, if h(x) is a polynomial of highest degree dividing each one of the given polynomials./बहुपद h(x) को दो या दो से अधिक बहुपदों का HCF कहा जाता है, यदि h(x) दिए गए बहुपदों में से प्रत्येक को विभाजित करने वाली उच्चतम डिग्री का बहुपद है।

Remark: The coefficient of highest degree term in HCF is always taken as positive.

HCF में उच्चतम डिग्री पद का गुणांक हमेशा सकारात्मक के रूप में लिया जाता है।

Ex. What is the HCF of $(x+3)^2 (x-2)^3$ and $(x-1)(x+3)(x-2)^2$?

Sol. $p(x) = (x + 3)^2 (x - 2)^3$

$g(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)^2$

we see that $(x + 3)(x - 2)^2$ is such a polynomial that is common divisor and whose degree is highest among all common divisor.

⇒ **LCM of polynomials/बहुपद का LCM**

A polynomial p(x) is called the LCM of two or more given polynomials, if it is a polynomial of smallest degree which is divided by each one of the given polynomials.

बहुपद p(x) को दो या दो से अधिक बहुपदों का LCM कहा जाता है, यदि यह सबसे छोटी डिग्री का बहुपद है जो दिए बहुपदों में से प्रत्येक से विभाजित होता है। → Table 1:-

Ex. Find the LCM of $(x - 3)(x + 4)^2$ and $(x - 3)^3 (x + 4)$?

Sol. $p(x) = (x - 3)(x + 4)^2$

$g(x) = (x - 3)^3 (x + 4)$

we make a polynomial by taking each factor of p(x) and g(x).

If a factor is common in both, then we take the factor which has highest degree in p(x) and g(x)

$\therefore$ LCM = $(x - 3)^3 (x + 4)^2$

Note:–

For only two polynomial p(x) and g(x)
p(x) × g(x) = (Their HCF) × (Their LCM)

➤ *Graphical and algebric representations of pair of lines or equation. (Table 1)*

Let the lines represented by the equation:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

are (i) intersecting, then $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) coincident, then $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) parallel, then $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

S. no	Pair of lines or equation	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	compare of ratios	Graphical representation	Algberic representation
1.	x–2y=0 3x+4y–20=0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	Intersecting lines	Exactly one solution (unique)
2.	2x+3y–9=0 4x+6y–18=0	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	Coincident lines	Many solutions
3.	x+2y–4=0 2x+4y–12=0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	Parallel lines	No. solution

➤ QUADRATIC EQUATION/द्विघात समीकरण

• *Quadratic equation/ द्विघात समीकरण:-*

A quadratic polynomial [f(x)] when equated to zero is called quadratic equation./एक द्विघात बहुपद [f(x)] जब शून्य के बराबर हो तो द्विघात समीकरण कहलाता है।

i.e. $ax^2 + bx + c = 0$,

where a,b,c $\in$ real number (R) and $a \neq 0$

• *Roots of quadratic equation/ एक द्विघात समीकरण के मूल*

The values of variable 'x' which satisfy the quadratic equation is called roots of quadratic equation./चर x के वे मान जो द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते है, द्विघात समीकरण के मूल कहलाते है।

Quodratic equation has two roots or two values of variable x./द्विघात समीकरण के दो मूल या चर 'x' की दो संख्या होती है।

➤ Methods to solve quadratic equation.

द्विघात समीकरण को हल करने के तीरके।

(a) *Factorisation method/ गुणनखंडन विधि*

If $ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta) = 0$. Then $x = \alpha$ and $x = \beta$ will satisfy the given equation and (α, β) are two roots of equation.

यदि $ax^2+bx+c = (x-a)(x-b) = 0$ तब x = a और x = b दिए गए समीकरण को संतुष्टि करेंगे और (a, b) समीकरण के दो मूल होंगे।

(b) *Discriminant formula/ विविक्तकर सूत्र*

$$(\alpha,\beta) = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

where $D = b^2 - 4ac$ & 'D' is discriminate of the equation

Quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, has two roots, given by

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, के दो मूल है, जो निम्नलिखित है।

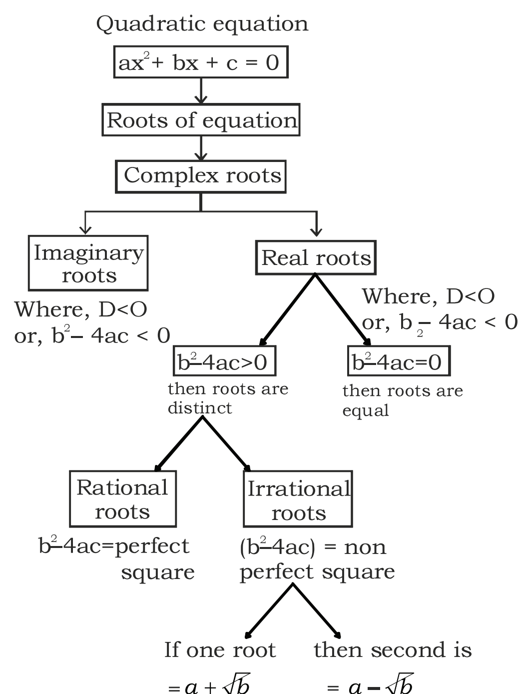
$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ or } \alpha = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ or } \beta = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

⇒ Let quadratic equation be $ax^2+bx+c = 0$, whose discriminate is D and $D = b^2-4ac$, than.

If value of Discriminate (D)	**Natural of Roots**	
(i) D > 0	Real, D is a perfect square	Distinct Rational, real, Unequal roots
	D is not a perfect square	Irrational, real unequal roots
(ii) D = 0	Real, equal roots	
(iii) D < 0	Non real or imaginary roots.	

➤ Flow Chart



- *Conjugate roots :* The irrational (Complex) roots of a quadrate equation, whose coefficients are rational (real) always occur in conjugate pairs. Thus,
संयुग्मी मूल द्विघात समीकरण के अपरिमेय (जटिल) मूल, जिनके गुणांक परिमेय (वास्तविक) होते है और सदैव संयुग्म युग्मों में होते हैं। इस प्रकार,
  a. If one root be $\alpha+i\beta$, then other roots will be $\alpha-i\beta$./ यदि एक मूल a+ib है तो दूसरा मूल a-ib होगा।
  b. If one root be $\alpha+\sqrt{\beta}$, then other root will be $\alpha-\sqrt{\beta}$ ./यदि एक मूल $\alpha+\sqrt{\beta}$ है, तो दूसरा मूल $\alpha-\sqrt{\beta}$ होगा।
- *Completing the square method for quadratic equation*
In this method, we have to convert the given equation into a perfect square to find the roots of the given quadratic equation./इस विधि में, दिए गए द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के लिए हमें दिए गए समीकरण को पूर्ण वर्ग में बदलना होता है।

There are two methods:-

- *Way 1 example :*
Given quadratic equation is $3x^2 - 5x + 2 = 0$
First make the coefficient of x^2 a perfect square so, multiply equation by '3'.

Now, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$

$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$

$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Now, $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ or $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

$3x = 3$ or $3x = 2$

$x = 1$ or $x = \frac{2}{3}$

Therefore, roots of given equation are 1 and $\frac{2}{3}$.

- *Way 2 methord*
Given equation is $3x^2 - 5x + 2= 0$
Make the coefficient of x^2 be 1,so,divide the given equation by '3'.

So, $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

Now, add and subtract the square of the half value of coefficient of x,

$x^2 - \frac{5}{3}x + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right]^2 + \frac{2}{3} = 0$

Now, make a perfect square,

$\left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3} = 0$

$\left[x - \frac{5}{6}\right]^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36} = 0$

$\left[x - \frac{5}{6}\right]^2 - \frac{1}{36} = 0$

$\left[x - \frac{5}{6}\right]^2 - \left[\frac{1}{6}\right]^2 = 0$

So, $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$

$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ and $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$x = 1$ and $x = \frac{2}{3}$

so, roots of the equation are 1 and $\frac{2}{3}$.

- *Quadratic equation and positive / negative roots*

Quadratic Equation	Positive/Negative roots
If quadratic equation is like,	Then,
(a) $ax^2 + bx + c = 0$	both value of x is negative
(b) $ax^2 - bx + c = 0$	both value of x is positive
(c) $ax^2 + bx - c = 0$	One value of x is positive and one is negative
(d) $ax^2 - bx - c = 0$	one value of x is positive and one is negative

- **Relation between roots and coefficients**
  मूल और गुणांक के बीच संबंध

1. *Quadratic equation/ द्विघात समीकरण:*

- If roots of quadratic equation $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$ are α and β then,
  यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$ के मूल a और b है, तो
- Sun of roots (s) $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{\text{coefficient of } x}{\text{coefficient of } x^2}$
  (मूलों का योग)
- Product of roots (p) $= \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{Constant term}}{\text{coefficient of } x^2}$
  (मूलों का गुणनफल)

  Also, $|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$, where $D = b^2-4ac$

Symmetry method:-Lets take a example for this method:

If α and β are the roots of the equation $x^2 - 2x + 4 = 0$, then the equation whose roots are $\left(\frac{\alpha^3}{\beta^2}, \frac{\beta^3}{\alpha^2}\right)$ is?

Sol:- Put $\alpha = \beta = x$

$\therefore$ because α is the root of equation and β is also root of equation. Hence they will satisfied it.

Now, $\left(\frac{\alpha^3}{\beta^2}, \frac{\beta^3}{\alpha^2}\right)$, because symmetry these roots becomes (α, β)

Hence, equation whose root (α, β) is the given equation i.e. $x^2 - 2x + 4 = 0$

2. *Cubic equation/ घन समीकरण :*

If α, β and γ are the roots of cubic equation $ax^3+bx^2+cx+d = 0$. / यदि a, b और g घन समीकरण $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ के मूल है।
Then,

- Sum of roots $= \alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{\text{Coeffioent of } x^2}{\text{Coefficient of } x^3}$
- Sum of product of two roots
  $= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } x^3}$
- Product of root $= \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = -\frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^3}$

3. *Biquodratic Equation/ द्विवर्गीय समीकरण:*

If α, β, γ and ω are the roots of the biquadratic equation i.e. $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$,

then,

- Sum of roots $(S_1) = \alpha+\gamma+\beta+\omega = -\frac{b}{a} = \frac{\text{coefficient of } x^3}{\text{coefficient of } x^4}$
- Sum of product of two roots $(S_2) =$
  $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\omega+\beta\gamma+\beta\omega+\gamma\omega = \frac{c}{a} = \frac{\text{coeff of } x^2}{\text{coeff of } x^4}$

  or, $S_2 = (\alpha+\beta)(\gamma+\omega)+\alpha\beta+\gamma\omega = \frac{c}{a}$
- Sum of product of three roots $(S_3) =$
  $\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\omega+\gamma\omega\alpha+\alpha\beta\omega = -\frac{d}{a} = -\frac{\text{coefficient of } x}{\text{coefficient of } x^4}$

  or $S_3 = \alpha\beta(\gamma+\omega) + \gamma\omega(\alpha+\beta) = -\frac{d}{a}$
- Product of roots $= \alpha\beta\gamma\omega = \frac{e}{a} = \frac{\text{constant term}}{\text{coefficient of } x^4}$

Formation of polynomial equation from given roots/दिए गए मूलों से बहुपद समीकरण का निर्माण

1. *Quadratic Equation/ द्विघात समीकरण:*

If α and β are the roots of a quadratic equation, then the equation is :
यदि α और β द्विघात समीकरण के मूल है, तो समीकरण
$x^2 - Sx + P = 0$

x^2 – (sum of roots) x + product of roots = 0

or, $x^2 - Sx + P = 0$
or, $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

2. *Cubic Equation/ घन समीकरण :*

If α, β and γ are the roots of cubic equation, then the equation is, i.e.
यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल है, तो समीकरण है,

$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

3. *Biquadratic Equation/ द्विवर्गीय समीकरण:*

If α, β, γ and ω are the roots of a biquadratic equation, then the equation is;
यदि α, β, γ और ω द्विवर्गीय समीकरण के मूल है, तो समीकरण है,

$x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\omega)x^3 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\omega+\alpha\omega+\beta\omega+\alpha\gamma)x^2 - (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\omega+\beta\gamma\omega+\gamma\omega\alpha)x + \alpha\beta\gamma\omega = 0$

Inequality/vlekurk

- A Statement involving the symbols > (greater than), < (Less than), $\geq$ (greater than or equal to) and $\leq$ (less than or equal to) is called on inequality or inequation.

ऐसा कथन जिसमें प्रतीक > (इससे बड़ा), < (इससे कम), $\geq$ (इससे बड़ा या इससे बराबर) और $\leq$ (इससे कम या इससे बराबर) सामिल हो उसे असमानता कहेगें।

Types of Inequalities/vlekurkvksa ds izdkj%

1. *Numerical inequality/ संख्यात्मक असमानता:* An inequality which does not involve any variable is called a numerical inequality

   ऐसी असमानता जिसमें कोई चर शामिल नहीं होता है, संख्यात्मक असमानता कहलाती है।

   Example /mnkgj.k% 5 > 2, 40 < 99, etc.

2. *Literal inequality/ शाब्दिक असमानता:* An inequality which have variables is called literal inequality./ ऐसी असमानता जिसमें चर होते हैं, शाब्दिलक असमानता कहलाती है।

   Example/mnkgj.k% 3x+y < 0, x>7, etc.

3. *Strict inequality/ कठोर असमानता:*

   An equality which have only < (less than) or > (greater than) is called strict inequality.

   ऐसी असमानता जिसमें केवल < (इससे कम) या > (इससे बड़ा) हो, कठोर असमानता कहलाती है।

   Example /mnkgj.k: x <7, x–y > 2, etc.

4. *Slack inequality/ सुस्त असमानता*

   An inequality which have only $\geq$ (greater than or equal to) or $\leq$ (less than or equal to) is called stock inequality.

   एक ऐसी असमानता जो केवल $\geq$ (इससे बड़ा या इसके बराबर) या $\leq$ (ठससे कम या इसके बराबर) हो, सुस्त असमानता कहलाती है।

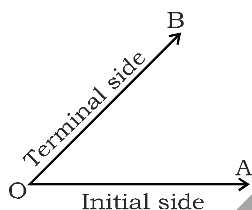
   Example /mnkgj.k: $x \geq 7$, $y \leq 7$, $3x+2y \geq 2$, etc.

TRIGONOMETRY
त्रिकोणमिति

CHAPTER 25

- ***Angle:*** Consider a ray $\vec{OA}$. If this ray rotates about its initial point O and takes the position OB, then we say that the angle $\angle AOB$ has been generated.

  कोण: एक किरण पर विचार करें। यदि यह किरण अपने प्रारंभिक बिंदु O के परित: चक्कर लगाती है और OB, स्थिति ग्रहण कर लेती है, तो हम कहते हैं कि कोण $\angle AOB$ बन गया है।

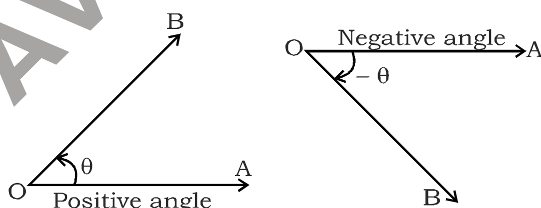


- ***Measurement of an angle :*** The measure of an angle is the amount of rotation performed to get the terminal side.

  कोण का माप: कोण का माप अन्तिम भुजा प्राप्त करने के लिए किए गए घुमाव की मात्र है।

- ***SENSE OF AN ANGLE :*** The sense of an angle is determined by the direction of rotation of the initial side into the terminal side. The sense of an angle is said to be positive or negative according as the initial side rotates in anticlockwise or clockwise direction to get to the terminal side.

  कोण का बोध: कोण का बोध प्रारंभिक पक्ष के अन्तिम पक्ष में घूमने की दिशा द्वारा निर्धारित किया जाता है। एक कोण को धनात्मक या ऋणात्मक कहा जाता है, के अनुसार प्रारंभिक पक्ष अन्तिम की ओर जाने के लिए घड़ी की विपरीत दिशा या घड़ी की दिशा में घूमता है।



- *SYSTEMS OF MEASUREMENT OF ANGLES/* कोणों को मापने की प्रणालियाँ*:*

  There are three systems for measuring angles,/ कोणों को मापने की तीन प्रणालियाँ हैं,

  (i) Sexagesimal or English system or degree measur/सेक्सेजिमल या अंग्रेजी प्रणाली या डिग्री माप

  (ii) Centesimal or French system /सेंटेसिमल या फ्रेंच प्रणाली

  (iii) Circular system or or radian measure/वृत्तीय प्रणाली या रेडियन माप

- *SEXAGESIMAL SYSTEM/*सेक्सेजिमल सिस्टम:

  In this system a right angle is divided into 90 equal parts, called degrees. The symbol 1° is used to denote one degree. Thus, one degree is one-ninth part of a right angle. Each degree is divided into 60 equal parts, called minutes. The symbol 1' is used to denote one minute. And each minute is divided into 60 equal parts, called seconds. The symbol 1" is used to denote one second.

इस सिस्टम में एक समकोण को 90 बराबर भागों में बांटा जाता है, जिसे अंश कहा जाता है। एक अंश को दर्शाने के लिए 1° चिन्ह का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, एक अंश समकोण का एक नब्बेवाँ भाग है। प्रत्येक अंश को 60 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, जिसे मिनट कहा जाता है। प्रतीक 1' का प्रयोग एक मिनट को दर्शाने के लिए किया जाता है। और प्रत्येक मिनट को 60 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, जिसे सेकंड कहा जाता है। प्रतीक1" का प्रयोग एक सेकंड को दर्शाने के लिए किया जाता है।

Thus, 1 right angle = 90 degrees (90°)
1° = 60 minutes (= 60')
1' = 60 seconds (= 60")

इस प्रकार, 1 समकोण = 90 डिग्री (90°)
1° = 60 मिनट (= 60')
1' = 60 सेकंड (= 60")

➢ *CENTESIMAL SYSTEM/*सेन्टेसिमल सिस्टम: In this system a right angle is divided into 100 equal parts, called grades; each grade is subdivided into 100 minutes, and each minute into 100 seconds /इस सिस्टम में एक समकोण को 100 बराबर भागों में बांटा जाता है, जिसे ग्रेड कहा जाता है; प्रत्येक ग्रेड को 100 मिनट में विभाजित किया गया है तथा प्रत्येक मिनट को 100 सेकंड में विभाजित किया गया है

The symbols 1^g, 1' and 1" are used to denote a grade, a minute, and a second respectively./प्रतीक 1^g, 1' और 1" क्रमशः एक ग्रेड, एक मिनट और एक सेकंड को दर्शाने के लिए उपयोग किए जाते हैं।

Thus, 1 right angle = 100 grades (= 100^g)
1 grade = 100 minutes (= 100')
1 minute = 100 seconds (= 100")

इस प्रकार, 1 समकोण = 100 ग्रेड(= 100^g)
1 ग्रेड = 100 मिनट (= 100')
1 मिनट = 100 सेकंड (= 100")

➢ *CIRCULAR SYSTEM/* वृत्तीय प्रणाली:

In this system the unit of measurement is radian as defined below.

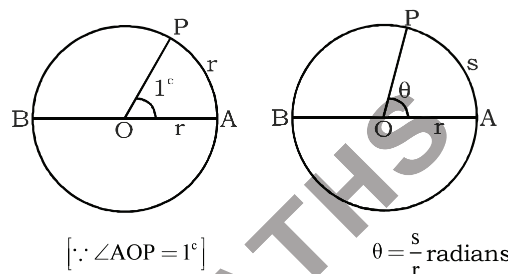
इस सिस्टम में माप की इकाई रेडियन है जैसा कि नीचे परिभाषित किया गया है।

➢ *RADIAN*/रेडियन: One radian, written as 1^C, is the measure of an angle subtended at the centre of a circle by an arc of length equal to the radius of the circle.

एक रेडियन, जिसे 1^C के रूप में लिखा जाता है, एक वृत्त के केंद्र पर वृत्त की त्रिज्या के बराबर लंबाई के द्वारा अंतरित कोण का माप है।

➢ The number of radians in an angles subtended by an arc of a circle at the centre is equal to $\frac{\text{arc}}{\text{radius}}$ /

एक वृत्त के चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोणों में रेडियन की संख्या $\frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ के बराबर होती है



$[\because \angle AOP = 1^c]$ $\theta = \frac{s}{r}$ radians

RELATION BETWEEN DEGREES AND RADIANS/ डिग्री और रेडियंस के बीच संबंध :

One radian = $\frac{180°}{\pi}$

π radians = 180°

1 रेडियन = $\frac{180°}{\pi}$

1 radian = $\frac{180}{\pi} = \left(\frac{180}{22}\times 7\right)$ = 57° 16'22" (approx).

π रेडियंस = 180°

180° = π radians.

Therefore, 1° = $\frac{180}{\pi}$ radian.

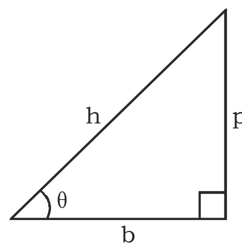
1° = $\frac{\pi}{180}$ radian = $\left(\frac{22}{7\times 180}\right)$ radian = 0.01746 radian.

➢ *RELATION BETWEEN THREE SYSTEMS OF MEASUREMENT OF AN ANGLE :*

एक कोण के मापन की तीन प्रणालियों के बीच संबंध:

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$$

Trigonometric Ration



In a right – angled triangle

$\sin\theta = \dfrac{p}{h}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{h}{p}$

$\cos\theta = \dfrac{b}{h}$

$\sec\theta = \dfrac{h}{b}$

$\tan\theta = \dfrac{p}{b}$

$\cot\theta = \dfrac{b}{p}$

Where 'p' is perpendicular, 'b' is base, and 'h' is hypotenuse.

Basic Trigonometric Identities based on above Ration

1.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{1}{\text{cosec}\theta} \\ \text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \sin\theta \times \text{cosec}\theta = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \cos\theta.\sec\theta = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \\ \cot\theta.\tan\theta = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \tan\theta.\cos\theta = \sin\theta \\ \dfrac{\tan\theta.}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \cot\theta.\ \sin\theta = \cos\theta \\ \dfrac{\cot\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} \end{array}\right.$$

Note:- If T- Ratio of any angle is given then you can find the rest T-Ratio by remembering this table

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\dfrac{1}{\text{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\dfrac{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}{\text{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\dfrac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\dfrac{\text{cosec}\theta}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
$\text{cosec}\,\theta$	$\dfrac{1}{\sin\theta}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\dfrac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\text{cosec}\,\theta$

Signs of Trigonometric Functions in Different Quadrants

90°, π/2

II quadrant — only sine and cosec+ve

I quadrant — All +ve

180°,π

0°,360°,2π

III quadrant — Only tan and cot +ve

IV quadrant — Only cos and sec +ve

270°,3π/2

Values of T–Rations of Some Standard Angles

Angle / Trigonometric Function	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.	0	N.D.	0
$\cot\theta$	N.D	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	N.D.	0	N.D.
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	N.D.	–1	N.D.	1
$\text{cosec}\,\theta$	N.D.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	N.D.	–1	N.D.

VARIATIONS IN VALUES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN DIFFERENT QUADRANTS

Trigonometric function	I quadrant	II quadrant	III quadrant	IV quadrant
sin	increase from 0 to 1	decreases from 1 to 0	decreases from 0 to – 1	increase from – 1 to 0
cosine	decreases from 1 to 0	decreases from 0 to – 1	increase from – 1 to 0	increase from 0 to 1
tangent	increase from 0 to ∞	increase from – ∞ to 0	increase from 0 to ∞	increase from – ∞ to 0
cotangent	decreases from ∞ to 0	decreases from 0to–∞	decreases from ∞ to 0	decreases from 0 to – ∞
secant	increase from 1 to ∞	increase from – ∞ to – 1	decreases from – 1 to – ∞	decreases from ∞ to 1
cosecant	decreases from ∞ to 1	increase from 1 to ∞	increase from – ∞ to – 1	decreases from–1to–∞

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
  $\cos(-\theta) = \cos\theta$
  $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
  $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
  $\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
  $\sec(-\theta) = \sec\theta$
- $\sin(90-\theta) = \cos\theta$
  $\cos(90-\theta) = \sin\theta$
  $\tan(90-\theta) = \cot\theta$
  $\cot(90-\theta) = \tan\theta$
  $\text{cosec}(90-\theta) = \sec\theta$
  $\sec(90-\theta) = \text{cosec}\,\theta$
- $\sin(90+\theta) = \cos\theta$
  $\cos(90+\theta) = -\sin\theta$
  $\tan(90+\theta) = -\cot\theta$
  $\cot(90+\theta) = -\tan\theta$
  $\text{cosec}(90+\theta) = \sec\theta$
  $\sec(90+\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
- $\sin(180-\theta) = \sin\theta$
  $\cos(180-\theta) = -\cos\theta$
  $\tan(180-\theta) = -\tan\theta$
  $\cot(180-\theta) = -\cot\theta$
  $\text{cosec}(180-\theta) = \text{cosec}\,\theta$
  $\sec(180-\theta) = -\sec\theta$

- $\sin(180+\theta) = -\sin\theta$
  $\cos(180+\theta) = -\cos\theta$
  $\tan(180+\theta) = \tan\theta$
  $\cot(180+\theta) = \cot\theta$
  $\text{cosec}(180+\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
  $\sec(180+\theta) = -\sec\theta$
- $\sin(270-\theta) = -\cos\theta$
  $\cos(270-\theta) = -\sin\theta$
  $\tan(270-\theta) = \cot\theta$
  $\cot(270-\theta) = \tan\theta$
  $\text{cosec}(270-\theta) = -\sec\theta$
  $\sec(270-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
- $\sin(270+\theta) = -\cos\theta$
  $\cos(270+\theta) = \sin\theta$
  $\tan(270+\theta) = -\cot\theta$
  $\cot(270+\theta) = -\tan\theta$
  $\text{cosec}(270+\theta) = -\sec\theta$
  $\sec(270+\theta) = \text{cosec}\,\theta$
- $\sin(360-\theta) = -\sin\theta$
  $\cos(360-\theta) = \cos\theta$
  $\tan(360-\theta) = -\tan\theta$
  $\cot(360-\theta) = -\cot\theta$
  $\text{cosec}(360-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
  $\sec(360-\theta) = \sec\theta$
- $\sin(360+\theta) = \sin\theta$
  $\cos(360+\theta) = \cos\theta$
  $\tan(360+\theta) = \tan\theta$
  $\cot(360+\theta) = \cot\theta$
  $\text{cosec}(360+\theta) = \text{cosec}\,\theta$
  $\sec(360+\theta) = \sec\theta$

N.D. → Not Defined

(a) $\sin n\pi = (-1)^n$; $\tan n\pi = 0$ where $n \in I$

(b) $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$; $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$ where $n \in I$

Point/Angle \ Trigonometric Function	sin	cos	tan	cot	cosec	sec
$-x$	–sin x	cos x	–tan x	–cot x	–cosec x	sec x
$\frac{\pi}{2}-x$	cos x	sin x	cot x	tan x	sec x	cosec x
$\frac{\pi}{2}+x$	cos x	– sin x	–cot x	– tan x	sec x	– cosec x
$\pi-x$	sin x	– cos x	–tan x	– cot x	cosec x	– sec x
$\pi+x$	–sin x	– cos x	tan x	cot x	– cosec x	– sec x
$\frac{3\pi}{2}-x$	–cos x	– sin x	cot x	tan x	– sec x	– cosec x
$\frac{3\pi}{2}+x$	–cos x	sin x	–cot x	– tan x	– sec x	cosec x
$2\pi-x$	–sin x	cos x	– tan x	– cot x	– cosec x	sec x
$2\pi+x$	sin x	cos x	tan x	cot x	cosec x	sec x

SOME BASIC IDENTITY :-

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
- $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$
- $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
- $\text{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$
- $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$
- $\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$
- $\text{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta - \cot\theta}$

➢ If you think it is difficult to remember all these identity then give only 10 minutes everyday to these identity and you will remember all these identity like you remember your name and your father name and believe me 90% of question asked in SSC CGL, CHSL, MTS, CPO, RRB NTPC, ALP, GROUP-D and state exam will be directly based on these identity.

➢ If you forget these identity you can solve these Type of question by putting any value of angle θ.

- $(1 - \sin^2\theta)\sec^2\theta = 1$
- $(1 - \cos^2 A)\text{cosec}^2 A = 1$
- $\tan^2\theta\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
- $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$
- $(1 + \cot^2 A)\sin^2 A = 1$
- $\text{cosec}\theta\sqrt{1 - \cos^2\theta} = 1$
- $(\sec^2\theta - 1)(\text{cosec}^2\theta - 1) = 1$
- $\cos^2\theta + \frac{1}{1 + \cot^2\theta} = 1$
- $\cos^2 A + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$
- $\sin^2 A + \frac{1}{1 + \tan^2 A} = 1$
- $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \sec\theta\,\text{cosec}\theta$
- $\frac{1}{1 + \sin\theta} + \frac{1}{1 - \sin\theta} = 2\sec^2\theta$
- $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$
- $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$
- $\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta = \text{cosec}^2\theta\sec^2\theta$
- $\sqrt{\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$
- $(\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1)\text{cosec}^2\theta = 2$
- $\cot^2\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} = -1$
- $(1 + \tan^2\theta)(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = 1$
- $(1 + \cot^2\theta)(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta) = 1$
- $\tan^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} = -1$
- $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \text{cosec}\theta + \cot\theta$
- $\frac{\tan\theta + \sin\theta}{\tan\theta - \sin\theta} = \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$
- $\cot\theta - \tan\theta = \frac{2\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$
- $\tan\theta - \cot\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$
- $\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \text{cosec}\theta - \cot\theta$
- $\sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$
- $\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \text{cosec}\theta + \cot\theta$
- $\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$
- $\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
- $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \text{cosec}\theta + \cot\theta$
- $\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$
- $\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\text{cosec}\theta - \cot\theta)^2$
- $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = 2\sec\theta$
- $\frac{(1 + \cot^2\theta)\tan\theta}{\sec^2\theta} = \cot\theta$
- $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$

  $= \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \frac{2}{2\sin^2 A - 1} = \frac{2}{1 - 2\sin^2 A}$

- $(\text{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$
- $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$
- $(\sin\theta + \text{cosec}\,\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2 = 7 + \tan^2\theta + \cot^2\theta$
- $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \text{cosec}\,\theta)^2 = (1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta)^2$
- $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
- $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$
- $2\sec^2\theta - \sec^4\theta - 2\text{cosec}^2\theta + \text{cosec}^4\theta = \cot^4\theta - \tan^4\theta$
- $(\sin\theta - \sec\theta)^2 + (\cos\theta - \text{cosec}\,\theta)^2 = (1 - \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta)^2$
- $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta} = \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta + \cot\theta$
- $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\text{cosec}\,\theta$
- $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \sec^2\theta - \text{cosec}^2\theta = \tan^2\theta - \cot^2\theta$
- $\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$
- $(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$
- $\tan^2\theta + \cot^2\theta + 2 = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$
- $\sqrt{\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$
- $\dfrac{1}{\text{cosec}A - \cot A} - \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin A} - \dfrac{1}{\text{cosec}A + \cot A}$
- $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \cos A + \sin A$
- $\dfrac{\tan A}{1-\cot A} + \dfrac{\cot A}{1-\tan A} = 1+\tan A+\cot A = 1+\sec A\,\text{cosec}A$
- $\cos^4 A - \cos^2 A = \sin^4 A - \sin^2 A$
- $\cot^4 A - 1 = \text{cosec}^2 A - 2\text{cosec}^2 A$
- $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A\cos^2 A$
- $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A = 2\sin^2 A - 1 = 1 - 2\cos^2 A$

  $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A$
- $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$
- $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \dfrac{1}{\sin^2 A\cos^2 A} - 2$
- $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} = \sin A + \cos A$
- $\dfrac{(1+\sin\theta)^2 + (1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = 2\left(\dfrac{1+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\right)$
- $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 1 + \sin\theta\cos\theta$
- $\dfrac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} + \sin\theta\cos\theta = 1$
- $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B\cos^2 A} = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$
- $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$
- $(1 - \sin\theta + \cos\theta)^2 = 2(1 + \cos\theta)(1 - \sin\theta)$
- $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\dfrac{\cot A + \text{cosec}A - 1}{\cot A - \text{cosec}A + 1} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$
- $\dfrac{\sin\theta}{\cot\theta + \text{cosec}\,\theta} = 2 + \dfrac{\sin\theta}{\cot\theta - \text{cosec}\,\theta}$
- $(\text{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta + \cot\theta}$
- $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0$
- $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$
- $(\sin^8\theta - \cos^8\theta) = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$
- $(1+\tan A\tan B)^2 + (\tan A - \tan B)^2 = \sec^2 A\sec^2 B$
- $(\tan A + \text{cosec}B)^2 - (\cot B - \sec A)^2 = 2\tan A\cot B(\text{cosec}A + \sec B)$
- $(\sin A + \sec A)^2 + (\cos A + \text{cosec}A)^2 = (1 + \sec A\,\text{cosec}A)^2$
- $\cot^2 A\left(\dfrac{\sec A - 1}{1+\sin A}\right) + \sec^2 A\left(\dfrac{\sin A - 1}{1+\sec A}\right) = 0$
- $\dfrac{\cos A}{1-\sin A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} + 1 = \dfrac{\sin A\cos A}{(1-\sin A)(1-\cos A)}$
- $\dfrac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A - \cos A)}{\sec^3 A - \text{cosec}^3 A} = \sin^2 A\cos^2 A$
- $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$
- $(\text{cosec}\,\theta + \sin\theta)(\text{cosec}\,\theta - \sin\theta) = \cot^2\theta + \cos^2\theta$
- $(\sec\theta + \cos\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta + \sin^2\theta$
- $\sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$
- $(\text{cosec}A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A) = 1$
- $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) = 1$
- $\sin^2 A\cot^2 A + \cos^2 A\tan^2 A = 1$

- (i) $\cot\theta - \tan\theta = \frac{2\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$

  (ii) $\tan\theta - \cot\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$
- $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \text{cosec}\,\theta + \sin\theta = 0$
- $\frac{1}{1+\sin A} + \frac{1}{1-\sin A} = 2\sec^2 A$
- $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta$
- $\frac{(1+\sin\theta)^2 + (1-\sin\theta)^2}{2\cos^2\theta} = \frac{1+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$
- $\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \left(\frac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2 = \tan^2\theta$
- $\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$
- $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$
- $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$
- $\text{cosec}^6\theta = \cot^6\theta + 3\cot^2\theta\,\text{cosec}^2\theta + 1$
- $\frac{(1+\tan^2\theta)\cot\theta}{\text{cosec}^2\theta} = \tan\theta$
- $\frac{1+\cos A}{\sin^2 A} = \frac{1}{1-\cos A}$
- $\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = \frac{\cos^2 A}{(1+\sin A)^2}$
- $\frac{1+\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1-\cos A}$
- $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$
- $\sqrt{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} + \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}} = 2\,\text{cosec}\,\theta$
- $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1+\cos A}} + \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = 2\,\text{cosec}A$
- $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$
- $\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1} = \left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2$
- $(\sec A - \tan A)^2 = \frac{1-\sin A}{1+\sin A}$
- $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = (\cot A - \text{cosec}A)^2$
- $\frac{1}{\sec A - 1} + \frac{1}{\sec A + 1} = 2\,\text{cosec}\,A\cot A$
- $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$
- $\frac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A - 1} + \frac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A + 1} = 2\sec^2 A$
- $\frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A} + \frac{\cot^2 A}{1+\cot^2 A} = 1$
- $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\text{cosec}A - 1}{\text{cosec}A + 1}$
- $\frac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \cot\theta$
- $\frac{1+\cos\theta - \sin\theta}{1+\cos\theta - \sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$
- $\frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\cos\theta + \sin\theta - 1} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$
- $(\sin\theta + \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = \sec\theta + \text{cosec}\,\theta$
- $\frac{1}{\sec A + \tan A} - \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sec A - \tan A}$
- $\tan^2 A + \cot^2 A = \sec^2 A\,\text{cosec}^2 A - 2$
- $\frac{\tan A}{1+\sec A} - \frac{\tan A}{1-\sec A} = 2\,\text{cosec}A$
- $1 + \frac{\cot^2\theta}{1+\text{cosec}\theta} = \text{cosec}\,\theta$
- $\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = 2\tan\theta$
- $(1+\tan^2 A) + \left(1+\frac{1}{\tan^2 A}\right) = \frac{1}{\sin^2 A - \sin^4 A}$
- $\sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$
- $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A\tan B$

- $\frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \tan A \tan B$
- $\cot^2 A \operatorname{cosec}^2 B - \cot^2 B \operatorname{cosec}^2 A = \cot^2 A - \cot^2 B$
- $\tan^2 A \sec^2 B - \sec^2 A \tan^2 B = \tan^2 A - \tan^2 B$
- $\frac{\tan^3\theta}{1+\tan^2\theta} + \frac{\cot^3\theta}{1+\cot^2\theta} = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta - 2\sin\theta\cos\theta$
- $\left(\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = 2\left(\frac{1+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\right)$
- $\left(\frac{1}{\sec^2\theta - \cos^2\theta} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta - \sin^2\theta}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1-\sin^2\theta\cos^2\theta}{2+\sin^2\theta\cos^2\theta}$
- $\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
- $\frac{1+\sec\theta-\tan\theta}{1+\sec\theta+\tan\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$
- $(\sec A + \tan A - 1)(\sec A - \tan A + 1) = 2\tan A$
- $(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$
- $(\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta)(\cot\theta - \tan\theta) = (\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta)(\sec\theta \operatorname{cosec}\theta - 2)$
- $(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1+\tan A+\cot A) = \tan A \sec A - \cot A \operatorname{cosec} A$
- $\frac{\cos A \operatorname{cosec} A - \sin A \sec A}{\cos A + \sin A} = \operatorname{cosec} A - \sec A$
- $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\operatorname{cosec} A + \cot A - 1} = 1$
- $\frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$
- $\sec^4 A(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$
- $\frac{\cot^2 A(\sec A - 1)}{1+\sin A} = \sec^2 A\left(\frac{1-\sin A}{1+\sec A}\right)$
- $(1+\cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \frac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \frac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}$

  $= \sin A \tan A - \cot A \cos A$

VALUES OF TRIGONOMETRY FUNCTION AT THE SUM OR DIFFERENCE:-

$\Rightarrow$ $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\Rightarrow$ $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B}$, $\tan(45+A) = \frac{1+\tan A}{1-\tan B}$

$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$, $\tan(45-A) = \frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \tan A}$, $\cot(45+A) = \frac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$

$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$, $\cot(45-A) = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}$

$\Rightarrow$ $\sin(A+B+C) = \sin A.\cos B.\cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A.\cos B.\sin C - \sin A.\sin B.\sin C$

$\Rightarrow$ $\cos(A+B+C) = \cos A.\cos B.\cos C - \sin A.\sin B.\cos C - \sin A.\cos B.\sin C - \cos A.\sin B.\sin C$

$\Rightarrow$ $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

$\Rightarrow$ $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

$\Rightarrow$ $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

$\Rightarrow$ $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$\Rightarrow$ $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\sin C - \sin D = 2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)$

$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\cos C - \cos D = -2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

VALUES OF TRIGONOMETRIC FUNCTION AT MULTIPLES AND SUBMULTIPLE OF AND ANGLE:-

$\Rightarrow$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

& $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\Rightarrow$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$1+\cos 2x = 2\cos^2 x$

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

$\Rightarrow$ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\Rightarrow$ $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

sinx= $\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

⇒ $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

or, $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

& $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

⇒ $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$

SOME IDENTITY BASED ON ABOVE FORMULA

⇒ $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

⇒ $\cot x = \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

⇒ $\cot x = \dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$

⇒ $\tan\frac{x}{2} = \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$

⇒ $\tan(45 + x) = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

⇒ $\tan(45 - x) = \dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

⇒ $\tan\left(45-\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

⇒ $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

⇒ $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\left(1-\tan^2 x\right)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

⇒ $\cos A.\ \cos 2A.\ \cos 2^2A.\ \cos 2^3A \ldots\ldots\ \cos^{2n-1} = \dfrac{\sin 2^n A}{2^n \sin A}$

⇒ $(1+\sec 2x)(1+\sec 4x)(1+\sec 8x)\ldots..(1+\sec 2^n x) = \tan^{2n}x\cot x$

⇒ $\tan\alpha + 2\tan\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = \cot\alpha$

⇒ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

⇒ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

⇒ $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

⇒ $\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$

⇒ $\cos x = 4\cos^3\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3}$

⇒ $\tan x = \dfrac{3\tan\frac{x}{3}-\tan^3\frac{x}{3}}{1-3\tan^2\frac{x}{3}}$

⇒ $\sin 6x = 24\sin x\cos^3 x - 18\cos x\sin x - 32\cos^3 x\sin^3 x + 24\sin^3 x\cos x$

⇒ $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x + 18\cos^2 x + 1$

$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

⇒ $\cos x\ \cos(60° - x)\cos(60°+x) = \frac{1}{4}\cos 3x$

⇒ $\sin x\ \sin(60° - x)\sin(60°+x) = \frac{1}{4}\sin 3x$

⇒ $\tan x + \tan(60°+x) - \tan(60° - x) = 3\tan 3x$

⇒ $\cot x + \cot(60°+x) - \cot(60° - x) = 3\cot 3x$

IF A AND B ARE COMPLIMENTARY ANGLES :-

A+B =90° then-

(I) sinA =cosB ⇒ sinA secB = 1 ⇒ cosecA cosB = 1

(II) tanA = cotB ⇒ tanA tan B = 1 ⇒ cotA cotB = 1

(II) secA = cosecB ⇒ secA.sinB=1 ⇒ cosecBsecA=1

⇒ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$\mathrm{cosec}^6 x - \cot^6 x = 1 + 3\,\mathrm{cosec}^2 x\cot^2 x$

$\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x\tan^2 x$

\# $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$\mathrm{cosec}^4 x + \cot^4 x = 1 + 2\,\mathrm{cosec}^2 x\cot^2 x$

$\sec^4 x + \tan^4 x = 1 + 2\sec^2 x\tan^2 x$

⇒ $\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\ (1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)$

⇒ $\cot^4 x + \cot x = \mathrm{cosec}^4 x - \mathrm{cosec}^2 x$

⇒ $\cot^4 x - \tan^4 x = 2\sec^2 x - \sec^4 x - 2\,\mathrm{cosec}^2 x + \mathrm{cosec}^4 x$

⇒ $(\sin x + \mathrm{cosec}\,x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 7$

$\Rightarrow$ (1+cot$x$ – cosec$x$) (1+tan$x$ + sec$x$) = 2

- $\dfrac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

$= \sec x + \tan x = \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$

- $\dfrac{\cot x + \text{cosec} - 1}{\cot x - \text{cosec}x + 1} = \cot x + \text{cosec}x = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

$= \cot x + \text{cosec}x = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

- $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{\sin A + \cos A - 1} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} +$

$= \sec x + \tan x = \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$

- $\dfrac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\cos\theta + \sin\theta - 1} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

Trigonometric Ratios of the Sum and Difference of Two Angles

(i) sin(A + B) = sin A cos B + cos A sin B

(ii) sin(A – B) = sin A cos B – cos A sin B

(iii) cos(A + B) = cos A cos B – sin A sin B

(iv) cos(A – B) = cos A cos B + sin A sin B

(v) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(vi) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(vii) $\cot(A + B) = \dfrac{\cot B \cot A - 1}{\cot B + \cot A}$

(viii) $\cot(A - B) = \dfrac{\cot B \cot A + 1}{\cot B - \cot A}$

Some more results:

(i) $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B).\sin(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A$.

(ii) $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B).\cos(A - B)$.

Some general result

1. If tanθ + sinθ = m & tanθ – sinθ = n
   then $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

2. If cosθ + sinθ = $\sqrt{2}\cos\theta$
   then cosθ – sinθ = $\sqrt{2}\sin\theta$

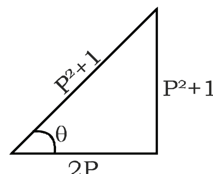
3. If x = a sinθ
   y = b tanθ
   then $\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

4. If x = r sinA cosC
   y = r sin A sin C then $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
   z = r cos A

6. If a cosθ – b sinα = θ
   then a sinθ + bcasθ = $\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

7. If sinθ + cosθ = p & secθ + cosecθ = q
   then q $(p^2 - 1)$ = 2p

8. If secθ + tanθ = p

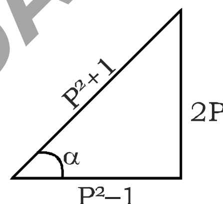


then Secθ = $\dfrac{p^2+1}{2p}$ cosθ = $\dfrac{2p}{p^2+1}$

tanθ = $\dfrac{p^2-1}{2p}$ cotθ = $\dfrac{2p}{p^2-1}$

sinθ = $\dfrac{p^2-1}{p^2+1}$ cosecθ = $\dfrac{p^2+1}{p^2-1}$

9. If cosecθ+ cotθ = P



then sinθ = $\dfrac{2p}{P^2+1}$ cosecθ = $\dfrac{P^2+1}{2P}$

cotθ = $\dfrac{P^2-1}{2P}$ tanθ = $\dfrac{2P}{P^2-1}$

cosθ = $\dfrac{P^2-1}{P^2+1}$ secθ = $\dfrac{P^2+1}{P^2-1}$

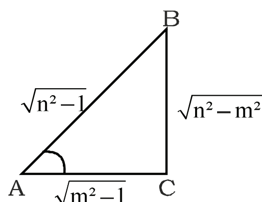
10. If $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ = m

& $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ = n

then $(m^2 + n^2)\cos^2\beta = n^2$

11. If cosecθ – sinθ = l & secθ – cosθ = m
    then $l^2m^2 (l^2 + m^2 + 3) = 1$

12. In tanA = n tanB
& sinA=msinB



then,

$\cos^2A = \frac{m^2-1}{n^2-1}$ $\sec^2A = \frac{n^2-1}{m^2-1}$

$\sin^2A = \frac{n^2-m^2}{n^2-1}$ $\text{cosec}^2A = \frac{n^2-1}{n^2-m^2}$

$\tan^2A = \frac{n^2-m^2}{m^2-1}$ $\cot^2A = \frac{m^2-1}{n^2-m^2}$

13. If $x\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$
& $x\sin\theta = y\cos\theta$
then $x^2 + y^2 = 1$
or $\Rightarrow x = \theta\cos\theta$ & $y = \sin\theta$

14. If $\text{cosec}\theta - \sin\theta = m$
& $\sec\theta - \cos\theta = n$
then $(m^2n)^{2/3} + (mn^2)^{2/3} = 1$

or $m = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ & $n = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

15. If $\cot\theta + \tan\theta = x$ & $\sec\theta - \cos\theta = y$
then $(x^2y)^{2/3} - (xy^2)^{2/3} = 1$

or $x = \frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}$ & $y = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$

16. If $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$
then $\sin\theta = \cos^2\theta$
& $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$
& $\cos^{12}\theta + 3\cos^{10}\theta + 3\cos^8\theta + \cos^6\theta + 2\cos^4\theta + 2\cos^2\theta - 2 = 1$

17. If $a\sec\theta + b\tan\theta + c = 0$ & $p\sec\theta + q\tan\theta + r = 0$
then $(br - cq)^2 - (pc - ar)^2 = (aq - bp)^2$

or $\sec\theta = \frac{br-cq}{aq-bp}$ & $\tan\theta = \frac{cp-ar}{aq-bp}$

18. If $\tan^2\theta = 1 - a^2$
then $\sec\theta + \tan^3\theta\cos\text{cosec}\theta = I(2 - a^2)^{3/2}$

19. If $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$
then $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$

20. If $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$
then $\sin 2\theta = 2$
$\sin\theta\cos = 1$
& $\tan\theta + \cot\theta = 1$

21. If $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$
then $\tan\theta = 1$ or $\frac{1}{2}$

22. If $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ & $y = a\tan\theta + b\sec\theta$
then $x^2 - y = a^2 - b^2$

23. If $\text{cosec}\theta + \cot\theta = m$
& $\text{cosec}\theta - \cot\theta = n$
then $mn = 1$

24. If $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ & $\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta$
then $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$

25. If $\text{cosec}\theta - \sin\theta = a^2$ & $\sec\theta - \cos\theta = b^3$
then $a^2b^2(a^2 + b^2) = 1$

26. If $a\cos^2\theta + 3a\cos\theta\sin^2\theta = m$
& $a\sin^3\theta + 3a\cos^2\theta\sin = n$
then $(m + n)^{2/3} + (m - n)^{2/3} = 2a^{2/3}$

27. $x = a\cos^3\theta$
$y = b\sin^3\theta$
then $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$

28. If $\cos A + \cos^2A = 1$
Then $\sin^2A + \sin^4A = 1$
& $\sin^{12}\theta + 3\sin^{10}\theta + 3\sin^8\theta + \sin^6\theta + 2\sin^4\theta + 2\sin^2\theta - 2 = 1$

29. If $(1+\cos\alpha).(1+\cos\beta).(1+\cos\gamma) = (1-\cos\alpha).(1-\cos\beta).(1-\cos\gamma)$
then $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
& $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

30. If $\sin\theta + \cos\theta = x$
then $\sin^6\theta + \cos^6\theta = \frac{4-3(x^2-1)^2}{4}$

31. If $x = a\sec\theta\cos\phi$
$y = b\sec\theta\sin\phi$
$z = c\tan\phi$
then $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2}$

32. If $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$
then $2\sin\theta - \cos\theta = 2$

33. If $\frac{\sin A}{\sin B} = p$ & $\frac{\cos A}{\cos B} = q$

than $\tan A = \pm \frac{p}{q}\sqrt{\frac{q^2-1}{1-p^2}}$

$\tan B = \pm\sqrt{\frac{q^2-1}{1-p^2}}$

34. $2\tan^2\alpha\tan\beta + \tan^2\alpha\tan^2\beta + \tan^2\beta\tan^2\alpha + \tan^2\tan^2\alpha = 1$

Then, $\text{cosec}^2\alpha\,\text{cosec}^2\beta\,\text{cosec}^2\gamma = \text{cosec}^2\alpha\,\text{cosec}^2\beta + \text{cosec}^2\beta\,\text{cosec}^2\gamma + \text{cosec}^2\gamma\,\text{cosec}^2\gamma$

&, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

35. If $\frac{ax}{\cos\theta} + \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$

& $\frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0$

Then, $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

36. If $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

then, $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$

& $\frac{\sin^{12} x}{a^5} + \frac{\cos^{12} x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^5}$

& $\frac{\sin^{4n} x}{a^{2n}-1} + \frac{\cos^{4n} x}{b^{2n}-1} = \frac{1}{(a+b)^{2n-1}}$ $\quad n \in N$

37. If $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha} = 1$

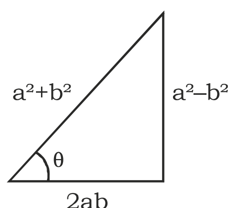
& $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$

then $\sin^4\alpha + \cos^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

38. If $\frac{2\sin x}{1+\cos x+\sin x} = a$

then, $\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\sin x} = a$

39. If $\sin x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$



$\tan x = \frac{a^2-b^2}{2ab}$ $\qquad \cot x = \frac{2ab}{a^2-b^2}$

$\cos x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ $\qquad \sec x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$

40. If $\text{cosec}x - \sin x = a^3$

$\sec x - \cos x = b^3$

then $a^2b^2(a^2 + b^2) = 1$

41. If $\cot x\,(1+\sin x) = 4m$

$\cot x\,(1- \sin x) = 4n$

then, $m^2 - n^2 = \sqrt{mn}$

42. If $T_n = \sin^n x + \cos^n x$

then $\frac{t_3 - t_5}{t_1} = \frac{t_5 - t_7}{t_3} = \frac{t_7 - t_5}{t_5}$

& $2t_6 - 3t_4 + 1 = 0$

& $6t_{10} - 15t_8 + 10t_6 - 1 = 0$

43. In a ΔABC, A, B, and C are interior angle of tringle-

$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ $\qquad \cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\frac{C}{2}$

$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$ $\qquad \cot\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan\frac{A}{2}$

$\tan\left(\frac{C+A}{2}\right) = \cot\frac{B}{2}$ $\qquad \cot\left(\frac{C+A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}$

- $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ $\qquad \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ $\qquad \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$

$\sin\left(\frac{C+A}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}$ $\qquad \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}$

In the similar way we can also write for $\sec\theta$ and $\text{cosec}\theta$, $\sec\theta$ will change into $\text{cosec}\theta$ and $\text{cosec}\theta$ will change into $\sec\theta$

Also in a triangle

cos(A+B) + cosC = 0 $\qquad$ sin(A+B) + sinC = 0

cos(B+C) + cosA = 0 $\qquad$ sin(B+C) + sinc = 0

cos(A+C) + cosB = 0 $\qquad$ sin(A+C) + sinB = 0

Similar way we can also write for $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ & $\text{cosec}\theta$

44. If A, B, C, D are angles of a cyclic quadrilateral

cosA + cosB + cosC + cosD = 0

& cos(180–A)+cos(180+B)+cos(180+C)–sin(90+D) = 0

45. In any quadrilateral ABCD

(I) sin(A+B) +sin(C+D) = 0

(II) cos(A+B) + cos(C+D) = 0

कुछ परिणाम (Results):

tan1°.tan2°. tan3° .... tan89° = 1

cot1°.cot2° . cot3° .... cot89° = 1

cos1°.cos2°.cos3°, ... cos90° = 0

[∴ cos90° = 0]

cos1°.cos2°.cos3°, ... cos90°.....

cos[90° से ज्यादा] = 0

sin1°.sin2°.sin3°, ... sin180° = 0

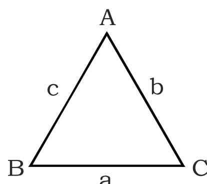
sin1°.sin2°.sin3°, ... sin [180° से ज्यादा]= 0

$\sin\theta . \sin 2\theta . \sin 4\theta = \frac{1}{4} \sin 3\theta .$

$\cos\theta . \cos 2\theta . \cos 4\theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta .$

$\tan\theta . \tan 2\theta . \tan 4\theta = \tan 3\theta .$

1.



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

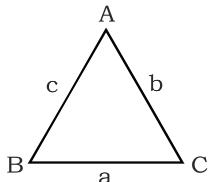
यह इस तरह भी प्रदर्शित किया जाता है।

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = K$

2. Δ ABC में:

- sin(B + C) = sinA
- sin(C + A) = sinB
- sin(A + B) = sinC
- cos(B + C) = –cosA
- cos(C + A) = – cosB
- cos(A + B) = –cos C
- tan(A + B) = – tanC
- tan(B + C) = –tanA
- tan(C + A) = – tanB
- $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = \left(\frac{b-c}{a}\right)\cos\frac{A}{2}$
- $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right)\sin\frac{A}{2}$
- $\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{a}\right)}$

3. Δ ABC में:



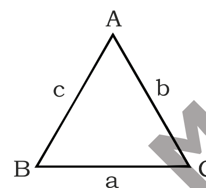
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ या, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ या, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ या, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

युक्ति सूत्र (Projection formulae):

किसी Δ ABC में,

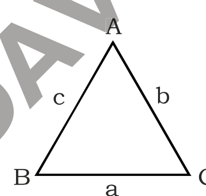
- a = b cos C + c cos B
- b = c cos A + a cos C
- c = a cos B + b cos A

Hence, one side of a triangle is equal to the sum of the projections of the other two sides. / अतः त्रिभुज की एक भुजा, अन्य दो भुजाओं के प्रोजेक्शनों के योग के बराबर होता है।



नेपियर का सूत्र (Tangents का नियम):

किसी Δ ABC में,



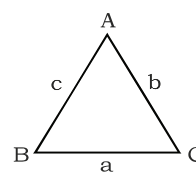
(i) $\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \left(\frac{b-c}{b+c}\right)\cot\frac{A}{2}$

(ii) $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cot\frac{C}{2}$

(ii) $\tan\left(\frac{C-A}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{c+a}\right)\cot\frac{B}{2}$

त्रिभुज का क्षेत्रफलः

किसी Δ ABC में,



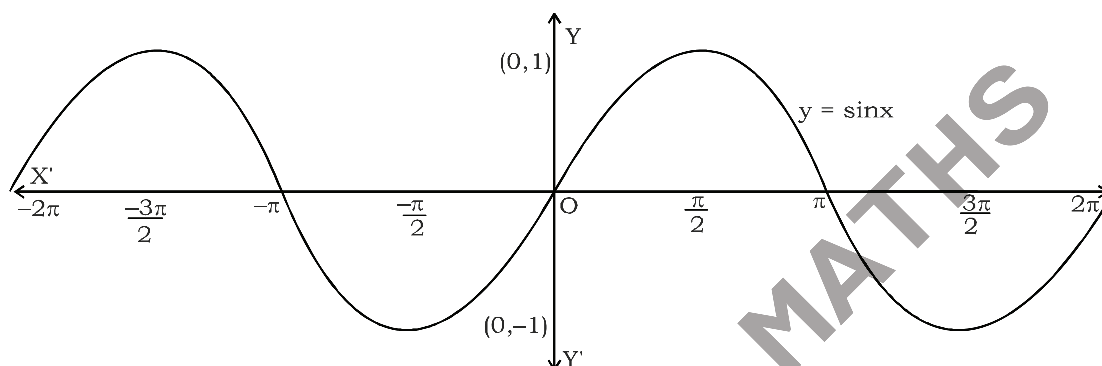
Δ ABC में, का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ bc sin A

= $\frac{1}{2}$ ca sin

B = $\frac{1}{2}$ ab sin C

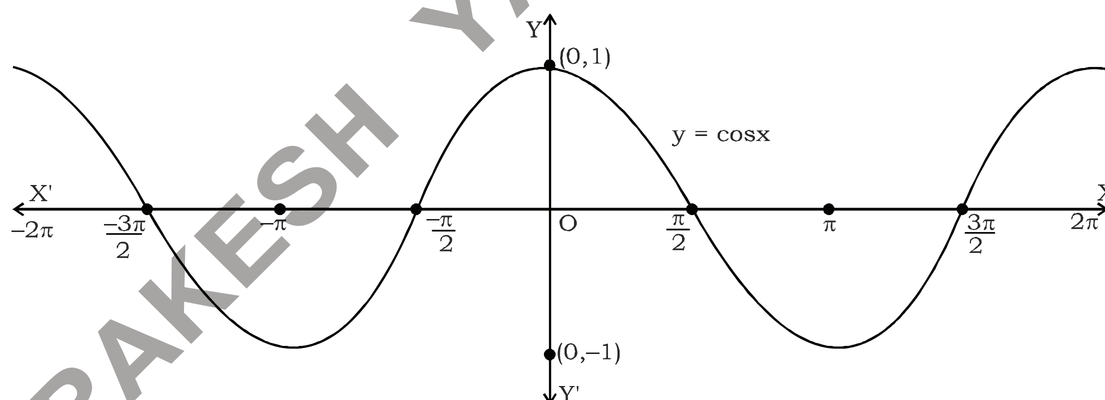
GRAPH OF SINE FUNCTION

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$y = \sin x$	0	0.5	0.71	0.86	1	0.86	0.71	0.5	0	–0.5	–0.71	– 0.86	–1	–0.86	–0.71	–0.5	0



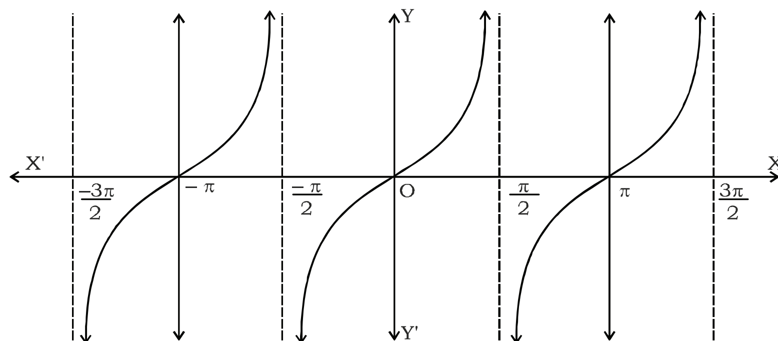
GRAPH OF COS FUNCTION

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y = \cos x$	1	0.86	0.71	0.5	0	–0.5	–0.71	–0.86	–1	–0.86	–0.71	–0.5	0	0.5	0.71	0.86	1



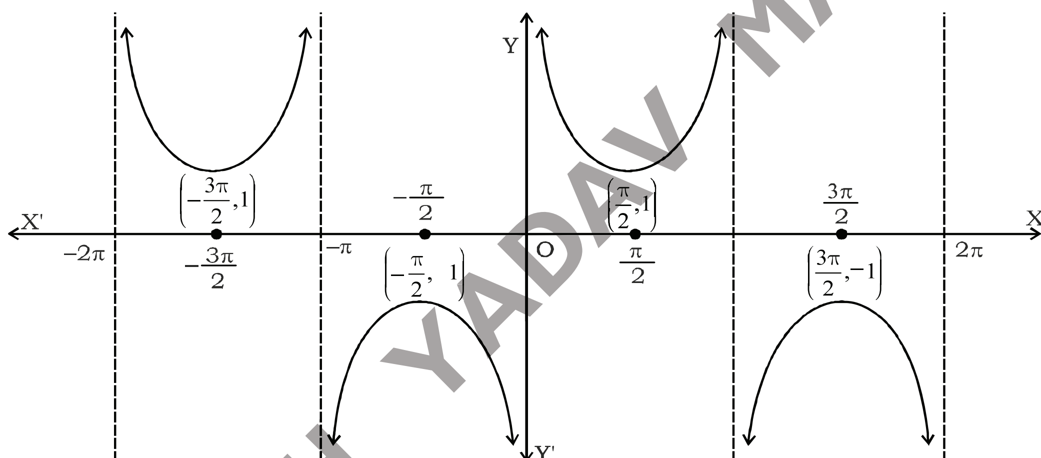
GRAPH OF TAN FUNCTION

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \tan x$	$-\infty$	$-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	∞



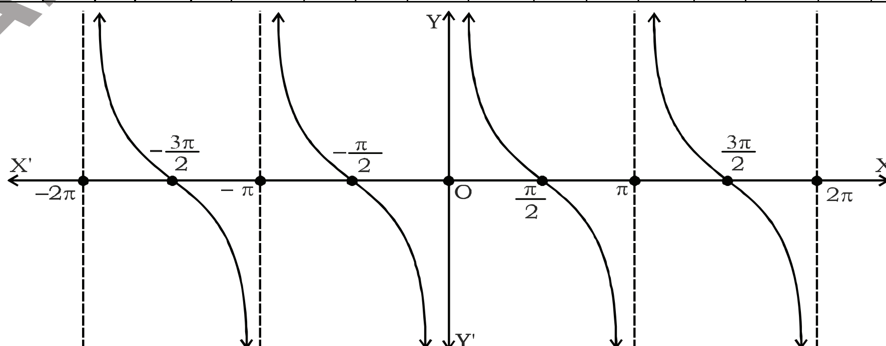
GRAPH OF COSEC FUNCTION

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{6}$	π^-	π^+	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x) = \text{cosec}x$	∞	2	$\sqrt{2}$ $= 1.41$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ $= 1.5$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ $= 1.15$	$\sqrt{2}$ $= 1.41$	2	∞	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$ $= -1.41$	-1.15	-1



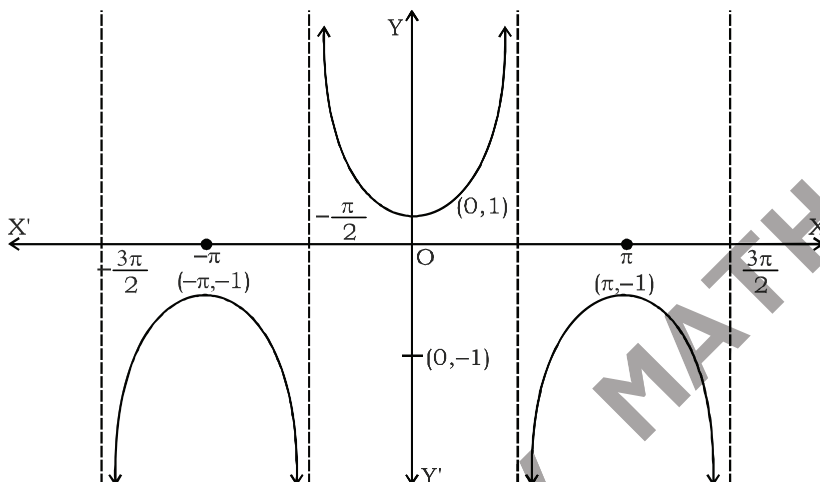
GRAPH OF COT FUNCTION

x	0^+	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π^-	π^+	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi^-$
$y - \cot x$	$\to\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$



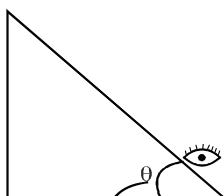
GRAPH OF SECANT FUNCTIONS

x	$-\frac{\pi^+}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi^-}{2}$	$\frac{\pi^+}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x) = \sec x$	$\to \infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1



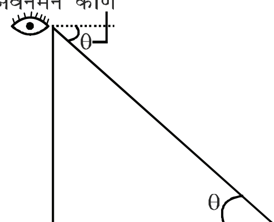
Some important formulas used in height and distance/ऊँचाई तथा दूरी में प्रयोग होने वाले कुछ महत्त्वपूर्ण सूत्र:

(i) When we look up, the angle formed by the observer along the horizontal is called the angle of elevation./ जब हम ऊपर देखते हैं तो प्रेषक का क्षैतिज के साथ बना कोण उन्नयन कोण कहलाता है।



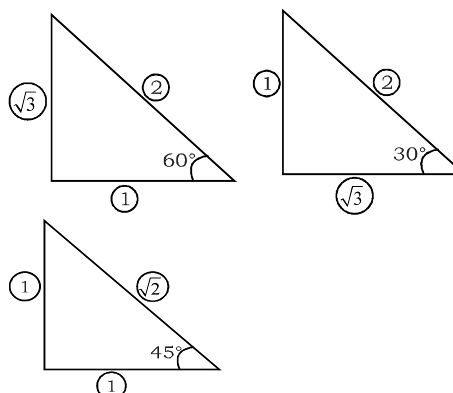
(ii) When we look down, the angle formed with the horizontal side of the press is called the angle of depression.

जब हम नीचे देखते हैं तो प्रेषक का क्षैतिज के साथ बना कोण अवनमन कोण कहलाता है।

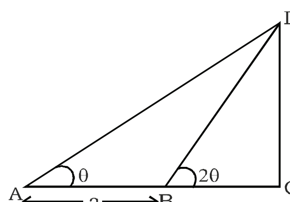


(iii) Most of the questions use angles of 30°, 45° and 60°, so we can remember the ratios of the sides with respect to these angles.

अधिकतम प्रश्नों में 30°, 45° तथा 60° के कोणों का प्रयोग होता है, तो हम इन कोणों के संदर्भ में भुजाओं के अनुपातों को याद रख सकते हैं।



(iv) If the value of the angle doubles when the distance is walked,/यदि a दूरी चलने पर कोण का मान दो गुना हो जाता है तब,



$\angle ADB = 2\theta - \theta = \theta$

What is the outer angle? (2θ, ΔADB/ का बाह्य कोण है)

ΔABD में,

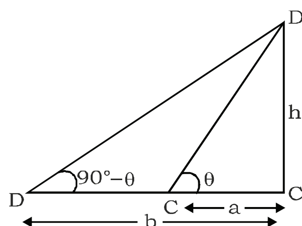
(Sides of opposite equal angles) AB = BD = a/ (विपरीत बराबर कोणों की भुजाएें)

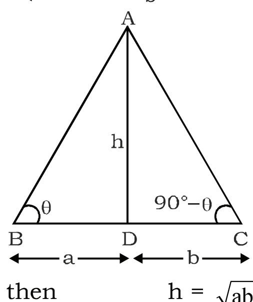
Then we can find the value of the height q using only one triangle.

तब हम केवल एक त्रिभुज BCD को प्रयोग करके ऊँचाई DC का मान ज्ञात कर सकते हैं।

(v) In a straight line, the height of the tower is complemented by the elevations made with the base of the tower and the summit of the tower at a distance of 10 km.

एक सीधी रेखा में टॉवर के आधार 'a' तथा 'b' दूरी पर स्थित बिन्दु C व D से टॉवर के शिखर के साथ बने उन्नयन एक-दूसरे के पूरक है, तो टॉवर की ऊँचाई:

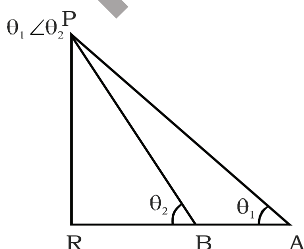




then $h = \sqrt{ab}$

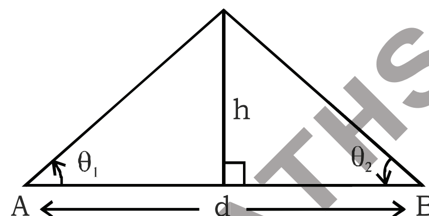
➢ If any two points. A and B if the angles of elevation of the summit of a tower of height H are θ_1 and θ_2 and the distance between these two points is d, then $d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

यदि किन्हीं दो बिन्दुओं A तथा B से किसी h ऊँचाई वाले टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण θ_1 तथा θ_2 हो तथा इन दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी d हो तो, $d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$



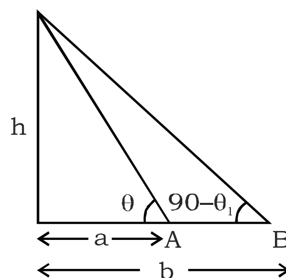
➢ Two points on either side of a tower of height h. If the angles of elevation of the summit of the tower are θ_1 and θ_2, then the distance between the two points will be. $d = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

किसी h ऊँचाई वाले टॉवर के दोनों और स्थित दो बिन्दुओं A तथा B के द्वारा टॉवर के शिखर के उन्नयन कोण θ_1 तथा θ_2 हो तो, दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी होगी। $d = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$



➢ If two points are located at a distance of a and b from the base of a tower of height h and the angle of elevation from the summit of the tower is complementry by these points, then $h = \sqrt{ab}$

किसी h ऊँचाई वाले टॉवर के आधार से a तथा b दूरी पर दो बिन्दु स्थित है तथा इन बिन्दुओं के द्वारा टॉवर के शिखर से उन्नयन कोण आपस में पूरक हो, तो $h = \sqrt{ab}$ होगा।



➢ Three points in the square of a TV tower. The angles of elevation from A, B and C, which are in a straight row, are located at the base of the tower is α 2α 3α . then height of the tower.

एक टी.वी. टॉवर की चोटी पर तीन बिन्दुओं A, B और C, जो एक सीधी पंक्ति में है टॉवर के आधार पर स्थित है; से उन्नयन कोण क्रमशः α, 2 α और 3α हैं। यदि AB = a है, तो टॉवर की ऊँचाई होगी?

a sin 2α

➢ A balloon of radius 'r 'subtend an angle of α over an observer's eye and the angle of elevation of its centre from the ground is β. The height of its center will be higher than the ground is -

त्रिज्या r का एक गुब्बारा एक प्रेक्षक की आँख पर α का कोण अंतरित करता है और भूमि से उसके केन्द्र का उन्नयन कोण β है। उसके केन्द्र की भूमि से ऊँचाई होगी- $r \sin\beta . \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$

- The angles of depression of two ships were found on either side of a light house α and β. If the height of the beam of light is h m. and the line joining the vessels passes under the beam of light, what will be the distance between the vessels?
  एक प्रकाश - पुंज के ऊपर से उसके दोनों ओर दो जहाजों के अवनमन कोण α और β पाए गए। यदि प्रकाश - पुंज की ऊँचाई h मी. है और उन जहाजों को मिलाने वाली रेखा प्रकाश-पुंज के नीचे से जाती है, जो जहाजों के बीच के दूरी क्या होगी?
  $\frac{h(\tan\alpha+\tan\beta)}{\tan\alpha\times\tan\beta}$
- The angles of elevation of the top of a building and the top of its chimney from the ground are x° and 45° , respectively. then the height (in metres) of the chimney is- (h cot x – h)
  भूमितल से एक भवन के शीर्ष तथा उसकी चिमनी के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः x° तथा 45°, उस भवन की ऊँचाई h मीटर है। तद्नुसार चिमनी की ऊँचाई (मीटर में) होगी- (h cot x – h)
- The angles of elevation from the top and bottom of a tree along with the top of a building are x and y respectively. Accordingly, if the height of the tree is h metres, then height of the building is- $\frac{h\cot x}{\cot x-\cot y}$
  एक भवन के शीर्ष के साथ एक पेड़ के शीर्ष एवं आधार से उन्नयन कोण क्रमशः x और y हैं। तद्नुसार यदि उस पेड़ की ऊंचाई h मीटर हो, तो उस भवन की ऊंचाई है:- $\frac{h\cot x}{\cot x-\cot y}$
- Two pillars are at a distance of x meters. The height of one of them is twice the height of the other. Accordingly, if an observer from the midpoint of the line connecting their bottoms finds the angles of elevation of their vertices complementary, height of the smaller pole is:- $\frac{x}{2\sqrt{2}}$
  दो खंभे x मीटरों की दूरी पर हैं। उनमें एक की ऊँचाई, दूसरे की दुगुनी है। तद्नुसार, यदि उनके तलों को जोड़ने वाली रेखा के मध्यबिन्दु से एक पर्यवेक्षक, उनके शीर्षों के उन्नयन कोण परस्पर पूरक पाता है, तो छोटे खंभे की ऊँचाई मीटर है:- $\frac{x}{2\sqrt{2}}$
- Three points A, B and C located on a horizontal straight line. The angles of elevation of the summit of a TV tower from A, B and C are α, 2α and 3α respectively. If AB = A and BC = b then height of the tower is:/एक क्षैतिज सरल रेखा पर स्थित तीन बिन्दुओं A, B व C से एक टी.वी. टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण क्रमशः α, 2α तथा 3α है। यदि AB = a और BC = b तो टॉवर की ऊँचाई है:- $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$
- A vertical tower stands on a horizontal plane and is surmounted by a vertical flagstaff of height h. At a point on the plane, the angles of elevation of the bottom and the top of the flagstaff are α and β respectively. the height of the tower is-/ एक ऊर्ध्वाधर टॉवर एक क्षैतिज तल पर खड़ा है और इस पर h ऊंचाई का ऊर्ध्वाधर फ्लैगस्टाफ लगाया जाता है। समतल पर एक बिंदु से, फ्लैगस्टाफ के आधार और शीर्ष के उन्नयन के कोण क्रमशः α और β हैं। तो टॉवर की ऊंचाई है- $\frac{h\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$
- Two stations due south of a leaning tower which leans towards the north are at distances of a and b from its foot. If α, β be the elevations of the top of the tower from these station, prove that its inclination θ to the horizontal is given by:/एक झुके हुए टॉवर के दक्षिण में स्थित दो स्टेशन जो उत्तर की ओर झुकते हैं, इसके आधार से a और b की दूरी पर हैं। यदि α तथा β इन स्टेशनों से टॉवर के शीर्ष की उन्नयन कोण है, तो क्षैतिज के लिए इसका झुकाव है:- $\cot\theta=\frac{b\cot\alpha-\alpha\cot\beta}{b-a}$
- If the angle of elevation of cloud from a point h metres above a lake is α and the angle of depresion of its reflection in the lake is β, the height of the cloud is:/ यदि एक झील से h मीटर ऊपर एक बिंदु से बादल की ऊंचाई का कोण α है और झील में इसके प्रतिबिंब के अवनमन का कोण β है, तो बादल की ऊँचाई है:- $\frac{h(\tan\beta+\tan\alpha)}{\tan\beta-\tan\alpha}$
- A round balloon of radius r subtends an angle α at the eye of the observer while the angle of elevation of its centre is β. the height of the centre of the ballon is- $r\sin\beta\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$.
  त्रिज्या r का एक गोल गुब्बारा पर्यवेक्षक की आंखों पर एक कोण α बनाता है जबकि इसके केंद्र के उन्नयन का कोण β है। तो गुब्बारा के केंद्र की ऊंचाई $r\sin\beta\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$ है।

- The angle of elevation of a cliff from a fixed point is θ. After going up a distance of k metres towards the top of the cliff at an angle ϕ, it is found that the angle of elevation is α. the height of the cliff is/ एक निश्चित बिंदु से एक चट्टान के शिखर का उन्नयन कोण θ है। पर चट्टान के शीर्ष की ओर ϕ के कोण पर k मीटर की दूरी तक जाने के बाद, यह पाया जाता है की चट्टान के शिखर का उन्नयन कोण α है। तो चट्टान की ऊंचाई है- $\frac{k(\cos\phi - \sin\phi\cot\alpha)}{\cot\theta - \cot\alpha}$ metres
- The angle of elevation of the top of a tower from a point A due south of the tower is α and from B due east of the tower is β. If AB = d, then the height of the tower is $\frac{d}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}}$.
  टॉवर के दक्षिण में एक बिंद A से टॉवर के शीर्ष उन्नयन कोण α है और टॉवर के पूर्व में बिंदु b से टॉवर के शीर्ष उन्नयन कोण β है? यदि AB = d है, तो टॉवर की ऊंचाई है:- $\frac{d}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}}$
- The elevation of a tower at a station A due north of its is α and at a station B due west of A is β. Prove that the height of the tower is:/एक टॉवर के शीर्ष के उन्नयन कोण एक स्टेशन A जो टॉवर के उत्तर में स्थित हैं से α है तथा स्टेशन B जो A के पश्चिम स्थित है से β है तो टॉवर की ऊँचाई है:- $\frac{AB\sin\alpha\ \sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}$
- The length of the shadow of a tower standing on level plane is found to be $2x$ meters longer when the sun's altitude is 30° than when it was 45°. then the height of tower is:- $x(\sqrt{3}+1)$
  समतल पर खड़े एक टॉवर की छाया की लंबाई 2x मीटर लंबी पाई जाती है जब सूरज उन्नयन कोण 30° होता है की अपेक्षा जब यह 45° होता है, तो टॉवर की ऊँचाई $x(\sqrt{3}+1)$
- A tree standing on a horizontal plane is leaning towards east. At two points situated at distance a and b exactly due west on it, the anlges of elevation of the top are respectively α and β. Prove that the height of the top from the ground is $\frac{(b-a)\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$
  समतल पर खड़ा एक पेड़ पूर्व की ओर झुक रहा है। इसके ठीक पश्चिम में a और b की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से, शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः α और β हैं। समतल से शीर्ष की ऊंचाई है $\frac{(b-a)\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$
- If the angle of elevation of a cloud from a point h meters above a lake is α and the angle of depression of its reflection in the lake be β, the distance of the cloud from the point of observation is/यदि एक झील के ऊपर h मीटर की ऊंचाई से बादल का उन्नयन कोण है α और झील में इसके प्रतिबिंब से अवनमन कोण β है, तो अवलोकन के बिंदु से बादल की दूरी है $\frac{2h\sec\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$
- From an aeroplane vertically above a straight horizontal road, the angles of depression of two consecutive miles stones on opposite sides of the aeroplane are observed to be α and β. Show that the height in miles of aeroplane above the road is given by/एक सीधी क्षैतिज सड़क के ऊपर लंबवत एक हवाई जहाज से, हवाई जहाज के विपरीत किनारों पर लगातार स्थित दो मील पत्थरों के अवनमन कोण क्रमशः α तथा β पाये जाते हैं, तो सड़क के ऊपर हवाई जहाज की ऊंचाई है $\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}$
- PQ is a pole of given height a, and AB is a tower at some distance, If α and β are the angles of elevation of B, the top of the tower, at P and Q respectively. the height of the tower and its distance from the post.
  PQ दी गई ऊँचाई a का एक खंम्भा है, और कुछ दूरी पर स्थित AB एक टॉवर है, यदि और क्रमशः α और β पर टॉवर के शीर्ष, B के उन्नयन के कोण हैं, तो
  Distance /दूरी = $\frac{\alpha}{\tan\alpha - \tan\beta}$, Height/ऊँचाई = $\frac{a\tan\alpha}{\tan\alpha - \tan\beta}$
- A ladder rests against a wall at an angle α to the horizontal. It foot is pulled away from the wall through a distance 'a', so that it slides a distance 'b' down the wall making an anle β with the horizontal. Show that/ एक सीढ़ी क्षैतिज के साथ α के कोण पर एक दीवार के सहारे टिकी हुई है। इसके आधार को a मीटर की दूरी तक पिछे खीचा जाता है। जिससे वह दीवार पर b मीटर की दूरी स्लाइड करती है। अब वह क्षैतिज के साथ β कोण बनाती हैं, तब- $\frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}$
- A tower, subtends an angle α at a point A in the plane of its base and the angle of depression of the foot of the tower at a point b meters just above A is β. the height of the tower is:- $b\tan\alpha\cdot\cot\beta$
  एक मीनार, अपने आधार के तल में बिंदु A पर एक कोण α बनाती है। और A के ठीक ऊपर b मीटर की ऊंचाई पर टॉवर के पाद के अवसाद कोण को β बनाती है। टॉवर की ऊंचाई:- $b\tan\alpha\cdot\cot\beta$

- From the top of a tower 'h' metre height, the angles of depression of two object, which are in the line with the foot of the tower are α and β $(\beta > \alpha)$. Find the distance between the two objects $h(\cot\alpha - \cot\beta)$
एक मीनार 'h' मीटर की ऊँचाई के शीर्ष से, दो बिन्दुओं जो टॉवर के पाद की रेखा में हैं, के अवनमन कोण, α तथा β हैं $(\beta > \alpha)$ तो दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी है $h(\cot\alpha - \cot\beta)$
- A window of a house is 'h' metre above the ground. From the window, the angles of elevation and depression of the top and bottom of another house situated on the opposite side of the lane are found to be α and β respectively. the height of the house is $h(1+\tan\alpha+\tan\beta)$ metres.
एक घर की खिड़की जमीन से 'h' मीटर ऊपर है। खिड़की से, गली के विपरीत दिशा में स्थित दूसरे घर के शीर्ष और तल के उन्नयन और अवनमन के कोण क्रमश: α और β पाए जाते हैं। तब घर की ऊंचाई $h(1+\tan\alpha+\tan\beta)$ मीटर है।
- If the angles of elevation of a tower from two points distant a and b (a>b) from its foot and in the same straight straight line from it are 30° and 60°, then the height of the tower is - $\sqrt{ab}$
यदि एक मीनार के पाद से दो बिंदुओं a और b (a>b) जो उससे सीधी रेखा हैं का उन्नयन कोण 30° और 60° है, तो टॉवर की ऊंचाई है- $\sqrt{ab}$
- From a light house the angles of depression of two ships on opposite sides of the light house are observed to be 30° and 45°. If the height of the light house is h metres the distance between the ships is:/एक प्रकाश गृह से प्रकाश गृह के विपरीत किनारों पर दो जहाजों के अवनमन के कोण 30° और 45° देखे जाते हैं। यदि लाइट हाउस की ऊंचाई h मीटर है, तो जहाजों के बीच की दूरी है:- $(\sqrt{3}+1)h$ metres
- The angle of elevation of the top of a tower standing on a horizontal plane from a point A is α. After walking a distance d towards the foot of the tower the angle elevation is found to be β. The height of the tower is:-/बिंदु A से क्षैतिज तल पर खड़े टॉवर के शीर्ष का उन्नयन कोण α है टॉवर के पाद की ओर थोड़ी दूरी d तय करने के बाद उन्नयन कोण β पाया जाता है, तो टॉवर की ऊंचाई है:- $\frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$
- Two persons are 'a' metres apart and the height of one is double that of the other. If from the middle point of th line joining their feet, an observer find the angular elevation of their tops to be complementary, then the height of the shorter post is:- $\frac{a}{2\sqrt{2}}$
दो व्यक्ति 'a' मीटर की दूरी पर हैं और एक की ऊंचाई दूसरे की ऊंचाई से दोगुनी है। यदि उनके पैरों को जोड़ने वाली रेखा के मध्य बिंदु से, एक पर्यवेक्षक उनके शीर्ष के कोण को पूरक पाता है, तो छोटे व्यक्ति की ऊंचाई है:- $\frac{a}{2\sqrt{2}}$
- The anlge of elevation of a cloud from a point h metre above a lake is θ. The angle of depression of its elevation of its reflection in the lake is 45°. The height of the cloud is:- h tan (45° + θ)
एक बिन्दु से एक झील के h मीटर ऊपर स्थित एक बादल का उन्नयन कोण θ हैं, तथा इस बिन्दु के झील में बने प्रतिबिंम्ब पर बादल का अवनमन कोण 45° है, बादल की ऊंचाई है:- h tan (45° + θ)
- A tower subtend an angle of 30° at a point on the same level as its foot. At a second point 'h' metres above the first, the depression of the foot of the tower is 60°. The height of the tower is:- $\frac{h}{3}$m
एक मीनार अपने पाद के समान स्तर पर एक बिंदु पर 30° का कोण बनाता है। पहले बिन्दु से h मीटर ऊपर स्थित दूसरे बिन्दु से टॉवर के पाद का अवनमन कोण 60° है। टॉवर की ऊंचाई है:- $\frac{h}{3}$m
- It is found that on walking x meters towards a chimeny in a horizontal line throught its base, the elevation of its top changes from 30° to 60°. The height of the chimney is:- $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ /यह पाया जाता है कि इसके आधार से क्षैतिज रेखा में एक चिमनी की ओर x मीटर चलने पर, इसके शीर्ष का उन्नयन कोण 30° से 60° तक बदल जाता है। चिमनी की ऊंचाई क्या है:- $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Maximum and Minimum Value of Trigonometric Function/त्रिकोणमितीय फलन का अधिकतम और न्यूनतम मान

Limits of values of trigonometric functions/ त्रिकोणमितीय फलनों के मानों की सीमाएँ

	Minimum value न्यूनतम मान	**Maximum value महत्तम मान**
$\sin\theta$ & $\cos\theta$ (विषम घात)	−1	+1
$\sin^2\theta$ & $\cos^2\theta$ (सम घात)	0	+1
$\tan\theta$ & $\cot\theta$ (विषम घात)	$-\infty$	∞
$\tan^2\theta$ & $\cot^2\theta$ (सम घात)	0	∞
$\sec\theta$ & $\mathrm{cosec}\,\theta$ (विषम घात)	$-\infty$	$+\infty$
$\sec^2\theta$ & $\mathrm{cosec}^2\theta$ (विषम घात)	1	∞

नोटः- The values of Meb and Bvemb can be anything from point of view but the values of Meb and Bvemb cannot be between -1 to 1.

$\sec\theta$ और $\text{cosec}\,\theta$ के मान $-\infty$ से $+\infty$ तक कुछ भी हो सकते है लेकिन $\sec\theta$ और $\text{cosec}\,\theta$ के मान -1 से 1 के बीच नहीं हो सकते हैं।

बढते और घटते फलनः

i. **First quadrant/प्रथम चतुर्थांशः**- $\sin\theta$ increases from 0 to 1 ; $\cos\theta$ decreases from 1 to 0 and $\tan\theta$ increases from 0 to ∞./$\sin\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता हैं, $\cos\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है और $\tan\theta$ का मान 0 से ∞ तक बढ़ता है।

ii. **2nd quadrant/द्वितीय चतुर्थांशः**- $\sin\theta$ decreases from 1 to 0 ; $\cos\theta$ decreases from 0 to 1 and $\tan\theta$ decreases, from ∞ to 0./$\sin\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है, $\cos\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है और $\tan\theta$ का मान ∞ से 0 तक घटता है।

iii. **3rd quadrant/तृतीय चतुर्थांशः**-$\sin\theta$ derceases from 0 to -1; $\cos\theta$ increases from -1 to 0; $\tan\theta$ increases from 0 to ∞ /$\sin\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है, $\cos\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है और $\tan\theta$ का मान 0 से ∞ तक बढता है।

iv. **चतुर्थ चतुर्थांशः**-$\sin\theta$ increases from -1 to 0; $\cos\theta$ increases from 0 to 1; $\tan\theta$ decreases from ∞ to 0./ $\sin\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है, $\cos\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है और $\tan\theta$ का मान ∞ से 0 तक घटता है।

IMPORTANT POINT:-

i. $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta$

In this type of expression/इस प्रकार के व्यंजक में,

यदि $a > b$

Maximum value/महत्तम मान = a

Minimum value/न्यूनतम मान = b

यदि $b > a$

Maximum value/महत्तम मान = b

Minimum value/न्यूनतम मान = a

ii. When angles are different and not dependent on each other/जब कोण, भिन्न और एक दूसरे पर निर्भर न करते हों, तब

$\sin^2\alpha$

Maximum value/महत्तम मान =+1

Minimum value/न्यूनतम मान = 0

$\cos^2\beta$

Maximum value/महत्तम मान = +1

Minimum value/न्यूनतम मान = 0

- If expression $a\sin\theta \pm b\cos\theta$ is given, then
  यदि $a\sin\theta \pm b\cos\theta$ व्यंजक दिया गया हो, तब

  Highest value/महत्तम मान = $\sqrt{a^2+b^2}$

  Minimum value/न्यूनतम मान = $-\sqrt{a^2+b^2}$

- If expression of $\sin^{2n}\theta + \cos^{2n}\theta$/यदि $\sin^{2n}\theta + \cos^{2n}\theta$ व्यंजक दिया गया हो, तब

  maximum value/महत्तम मान = 1

  minimum value/न्यूनतम मान = put $\theta = 45°$

- In the expression of $\sin^n\theta . \cos^n\theta$.
  व्यंजक $\sin^n\theta . \cos^n\theta$ के लिए,

  Maximum value/महत्तम मान = $\frac{1}{2^n}$

  Minimum value/न्यूनतम मान के लिए

  (i) When n is even then minimum value 0/जब n सम संख्या है। तब न्यूनतम मान = 0

  (ii) When n is odd then minimum value/जब n विषम संख्या है। तब न्यूनतम मान $\left(\frac{-1}{2^n}\right)$

- $\sin^n\theta$
  when n is even , max=1 , min= 0

- $a\tan^2\theta + b\cot^2\theta$
  or

  $a\tan^2\theta + \frac{b}{\tan^2\theta}$

  minimum value/न्यूनतम मान = $2\sqrt{ab}$

  maximum value/महत्तम मान = ∞

- in expression of $a\sin^2\theta + b\,\text{cosec}^2\theta$ /यदि $a\sin^2\theta + b\,\text{cosec}^2\theta$ व्यंजक दिया गया हो, तब

  (i) if $a \le b$ minimum value/न्यूनतम मान = a + b

  (ii) if $a \ge b$ minimum value/न्यूनतम मान = $2\sqrt{ab}$

- In expression of $a\cos^2\theta + b\sec^2\theta$ /यदि $a\cos^2\theta + b\sec^2\theta$ व्यंजक दिया गया हो, तब

  (i) If $a \le b$ minimum value/न्यूनतम मान = a+b

  (ii) If $a \ge b$ minimum value/न्यूनतम मान = $2\sqrt{ab}$

- In the expression of $a\sec^2\theta + b\,\text{cosec}^2\theta$ /यदि $a\sec^2\theta + b\,\text{cosec}^2\theta$ व्यंजक दिया गया हो, तब

  Minimum value/न्यूनतम मान = $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

  Maximum value/महत्तम मान = ∞

LINE AND ANGLE
रेखा और कोण

CHAPTER 26

LINE AND ANGLE/रेखा और कोण

➢ ***POINT/बिन्दु***

A point is a position is space which has no length or width or thickness.

एक बिंदु एक स्थान है। जिसका न कोई आकार होता है न चोड़ाई, न लंबाई और न गहराई।

➢ ***Types of point/बिन्दु के प्रकार***

(i) Collinear point/सरेंख बिन्दु

If 3 or more than 3 point lie on a line close to or far from each other, then they are said to be collinear.

यदि 3 या 3 से अधिक बिंदु एक रेखा पर एक दूसरे के निकट या दूर स्थित हो, तो वे सरेख कहलाते है।

Eg. Point P, Q, R, S are collinear/P, Q, R, S एक सरेख है।



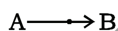
(ii) Non–collinear point/असरेंख बिन्दु

If 3 or more point are not situated on a straight line, these all point are called non-collinears point.

यदि 3 या अधिक बिंदु एक सीधी रेखा पर स्थित नहीं हैं, तो ये सभी बिंदु असरेख बिंदु कहलाते हैं।

➢ ***Ray line/किरण रेखा***

A line with uni-direction length



A line is a straight one – dimensional figure that does not have a thickness, and it extends endiessly in both directions.

एक रेखा एक सीधी एक आयामी आकृति है जिसमें मोटाई नही होती है, और यह दोनों दिशाओ में अंतहीन रूप से फैली हुई है।

➢ ***Line segment/रेखाखंड***

A line having a fixed length is known or line segment.

एक रेखा जिसकी लम्बाई निश्चित है उस रेखा को रेखाखण्ड कहते हैं।



Types of line/रेखा के प्रकार:-

(a) STRAIGHT LINE/सीधी रेखा

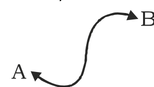
A line which does not change it's direction at any point is called a straight line.

ऐसी रेखा जो किसी भी बिन्दु पर अपनी दिशा नही बदलती, वह सीधी रेखा कहलाती है।



(b) Curved line/वक्र रेखा

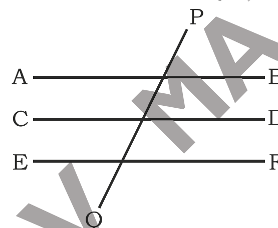
A line which change its direction is called a curved line./वह रेखा जो अपनी दिशा बदलती है वक्र रेखा कहलाती है।



(c) Transversal line/तिर्यक रेखा

A transversal is a line that passes through two or more lines in the same plane at two distinct points.

एक तिर्यक रेखा एक रेखा है जो एक ही तल मे दो अलग-अलग बिंदुओ पर दो रेखाओं से होकर गुजरती है।

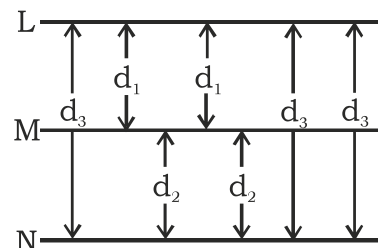


AB||CD||EF and PQ is transversal line.

(d) Parallel line/समांतर रेखाः-

Parallel lines are lines in a plane that are always the same distance apart. Parallal line never intersect.

समांतर रेखाएँ एक समतल मे ऐसी रेखाए होती है जो हमेशा समान दूरी पर होती है। समान्तर रेखाएँ कभी प्रतिच्छेद नही करती है।

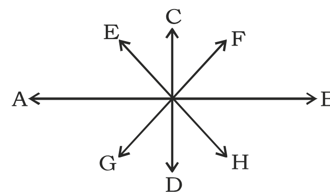


L||M||N These line are parallel line.

➢ ***Concurrent line/समकेंद्रीय रेखा***

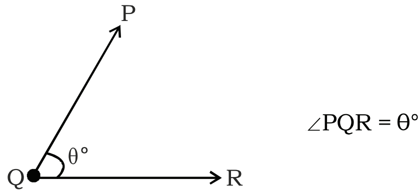
Three or more than lines, which pass from a single point is called concurrent lines.

तीन या अधिक रेखाएँ, जो एक बिंदु से होकर गुजरती हैं, समकेंद्रीय रेखाएँ कहलाती हैं।



- ***Angle/कोण***

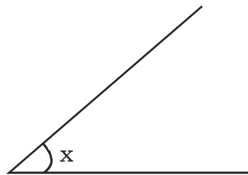
  Angle is the inclination between two side.



$\angle PQR = \theta°$

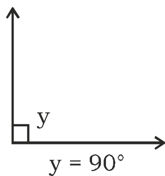
- **Type of Angles**

1. Acute angle/न्यून कोण:–



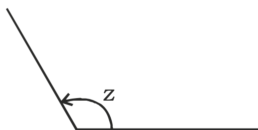
If/यदि $0° < x < 90°$ then x is acute angle. तब x एक न्यून कोण होगा।

2. Right angle/समकोण:–



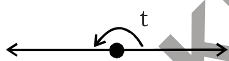
If/यदि $y = 90°$ then y is right angle तब y एक समकोण होगा।

3. Obtuse angle/अधिक कोण:–



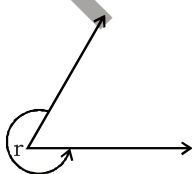
If/यदि $90° < z < 180°$ then z is obtuse angle तब z एक अधिक कोण है।

4. Straight angle/ऋजु कोण:–



If $t = 180°$ then angle is straight angle/ यदि $t = 180°$ तब कोण सीधा कोण कहलता है।

5. Reflex angle/प्रतिवर्ती कोण:–



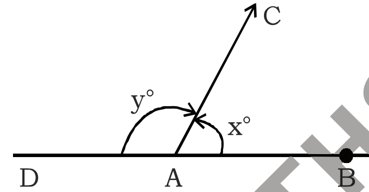
If $180° < r < 360°$ then angle r is reflex angle.
यदि कोण 180° और 360° के बीच है तो कोण r बृहत्त कोण होता है।

6. Complementary angle/पूरक कोण:–

When the sum of the measures of the two angle is 90°, then angle are called "complementary angles".
जब दो कोणो का योग 90° तो कोण पूरक कोण कहलाते है।

7. Supplementary angle/सम्पूरक कोण:–

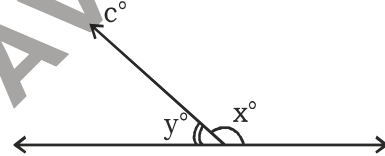
Sum of two angle which are supplementary is 180°
दो कोण जो संपूरक हैं उनका योग 180° होता है।



$\angle x + \angle y = 180°$]

➢ ***Linear pair angle/कोणों का रैखिक युग्म***

A linear pair is a pair of adjacent angle whose non-common sides are opposite rays.
एक रेखीय युग्म आसन्न कोणों का युग्म होता है, जिसकी गैर उभयनिष्ठ भुजाएँ विपरीत किरण रेखा होती हैं।

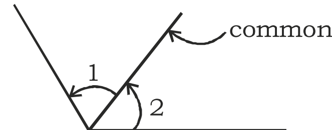


$\angle x + \angle y = 180°$

$\Rightarrow$ Linear pair angle are supplementray.

➢ ***Adjacent angles/आसन्न कोण***

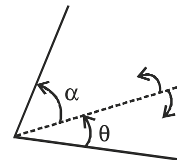
Two angles are said to be adjacent if



$\angle 1$ and $\angle 2 \rightarrow$ adjacent angle.

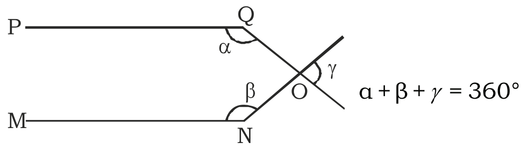
(i) They have a common vertex
(ii) They have a common arm.

- The non-common arm are on either side of the common arm.

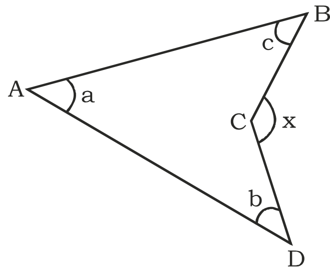


- Common arm
- Common vertex

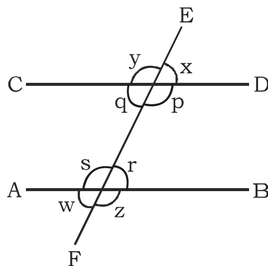
- PQ || MN then find the value of $\alpha + \beta + \gamma$?



$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

- 

x = a + b + c

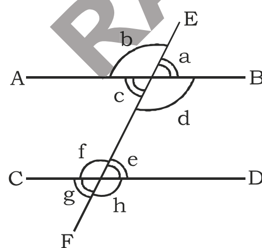
- 

AB||CD,
EF is transveral line

So, $\angle x = \angle w$ [Alternate Angle] = Exterior

$\angle y = \angle z$ [Alternate Angle] =Exterior

$\angle p = \angle s$
$\angle q = \angle r$ [Alternate interior Angle]

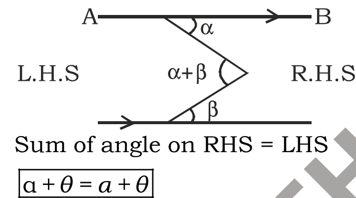
- 

If AB||CD,
EF is transversal line,
So, because of vertical opposite angle:

$(\angle a = \angle c)$; $(\angle b = \angle d)$; $(\angle e = \angle g)$; $(\angle f = \angle h)$

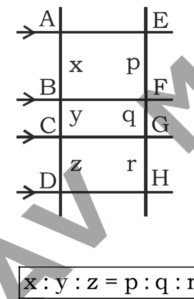
and because of corresponding angle:

$(\angle a = \angle e)$; $(\angle b = \angle f)$; $(\angle c = \angle g)$; $(\angle d = \angle h)$

- 

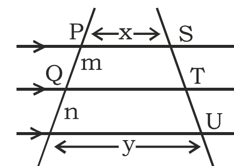
Sum of angle on RHS = LHS

$\boxed{\alpha + \theta = a + \theta}$

- 

$\boxed{x : y : z = p : q : r}$

$$\boxed{\frac{x}{x+y+z} = \frac{p}{p+q+r}}$$

- 

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{ST}{TU} = \frac{m}{n}$$

$$QT = \frac{xm + yn}{m + n}$$

There is one and only one line passing throught two distinct point.

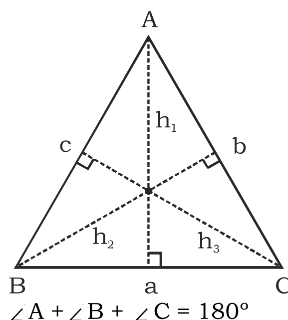
Two or more line are said to be coplaner if they lie in the same plane, otherwise they are said to be non-coplaner.

दो विभिन्न बिन्दुओं से होकर जाने वाली एक और केवल एक ही रेखा है। दो या दो से अधिक रेखाएं समतलीय कहलाती हैं यदि वे एक ही तल में स्थित हों, अन्यथा उन्हें गैर-समतलीय कहा जाता है।

TRIANGLE
त्रिभुज

A **triangle** is closed figure with three sides or a closed plane figure having **three sides** and **three angles**./एक त्रिभुज तीन भुजाओं के साथ एक बंद आकृति है या एक बंद समतल आकृति है जिसमें तीन पक्ष और तीन कोण हैं।

➢ 3 sides, 3 vertices, 3 altitudes, 3 angles
3 भुजाएँ, 3 शीर्ष, 3 ऊँचाई, 3 कोण



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Area $\Rightarrow \frac{1}{2} \times a \times h_1 = \frac{1}{2} bh_2 = \frac{1}{2} ch_3 = \frac{1}{2} \times$ Base × Corresponding height./संबंधित ऊंचाई।

$\Rightarrow ah_1 = bh_2 = ch_3 =$ constant/$ah_1 = bh_2 = ch_3 =$ स्थिर

$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

Property of triangle/त्रिभुज का गुण-1:

Sum of two sides is always greater then third side./दो भुजाओं का योग हमेशा तीसरी भुजा से अधिक होता है।

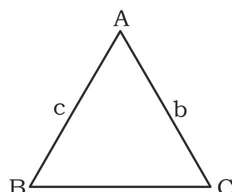
$b + c > a$ $b > |a - c|$
$a + b > c$ $\Rightarrow$ $b > |c - a|$
$c + a > b$

Property of triangle/त्रिभुज का गुण-2:

Differnce of two side is always less than third side./दो पक्षों का अंतर हमेशा तीसरे पक्ष से कम होता है।

$|b - c| < a$
$|c - a| < b$
$|a - b| < c$

Property of triangle/त्रिभुज का गुण-3:



q$\Rightarrow \angle B = \angle C \Leftrightarrow b = c$
$\Rightarrow \angle B > \angle C \Leftrightarrow b > c$
$\Rightarrow \angle B < \angle C \Leftrightarrow b < c$

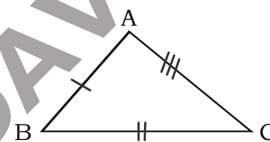
Classification of Triangles/त्रिभुजों का वर्गीकरण

There are many different kinds of triangles. The following table outlines some basic types of triangles./त्रिभुजों के कई अलग-अलग प्रकार हैं। निम्न तालिका कुछ बुनियादी प्रकार के त्रिकोणों को रेखांकित करती है।

On the basis of sides/भुजाओं के आधार पर

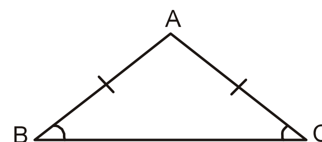
(i) *Scalene Triangle/ विषमबाहु त्रिभुज*- All three sides are of different lengths is called a Scalene Triangle.
तीनों भुजाएं अलग-अलग लंबाई की होती हैं जिन्हें विषमबाहु त्रिभुज कहा जाता है।

$AB \neq BC \neq CA$



(ii) *Isosceles Triangle/ समद्विबाहु त्रिभुज:*- Two sides are of equal length, is called a Isosceles Triangle./दो भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं, जिन्हें समद्विबाहु त्रिभुज कहा जाता है।

$AB = AC$

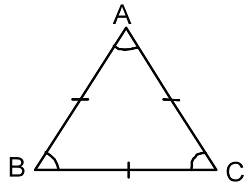


→ Angles opposite to equal sides are equal.
समान भुजाओं के विपरीत कोण समान हैं।
i.e. $\angle B = \angle C$

Area $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ where a = length of equal side/b = BC/क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ जहां a = समान भुजा की लंबाई

$b = BC$

(iii) *Equilateral Triangle/ समबाहु त्रिभुज* **-** A triangle having all sides equal is called Equilateral triangle.
एक त्रिभुज जिसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
$AB = BC = CA$



- All angles are equal and is equal to 60°/सभी कोण समान हैं और 60° के बराबर हैं

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

Inradius/अंत:त्रिज्या = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$

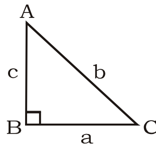
circumradius/परित्रिज्या = $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Altitude/ऊँचाई = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Area/क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

On the basis of angles/कोण के आधार पर

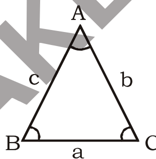
(i) Right-angled Triangle/समकोण त्रिभुज:- In a triangle, in which one of the angles measures 90°. Rest two angles are complementary to each other./एक त्रिभुज में, जिसमें एक कोण 90° होता है। शेष दो कोण एक दूसरे के पूरक हैं।



Largest side/बड़ी भुजा, $b^2 = a^2 + c^2$

$\therefore \angle B = \angle A + \angle C$

(ii) *Acute-angled Triangle/न्यून कोण त्रिभुज-* A triangle in which every angle is more than 0° and less than 90°./एक त्रिभुज जिसमें प्रत्येक कोण 0° से अधिक और 90° से कम होता है.



Largest side/बड़ी भुजा, Let $b^2 < (a^2 + c^2)$

$\therefore$ According to cosine formula/कोसाइन सूत्र के अनुसार

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Here cos gives +ve value because B < 90°

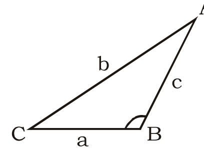
यहां cos का मान +ve देता है क्योंकि B < 90° है

Each angle is less than the sum of the other two.

प्रत्येक कोण अन्य दो के योग से कम है।

(iii) *Obtuse-angled triangle/अधिक कोण त्रिभुज* - A triangle in which one of the angles is more than 90°./एक त्रिभुज जिसमें एक कोण 90° से अधिक है।

Largest side/बड़ी भुजा, $b^2 > a^2 + c^2$



$\therefore$ According to cosine formula/कोसाइन सूत्र के अनुसार

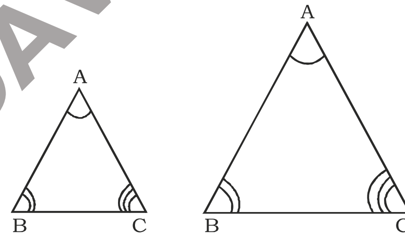
$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos B$$

Here cos gives negative value So, –ve becomes +ve because B > 90°/यहाँ cos ऋणात्मक मान देता है इसलिए, So, –ve बन जाता है क्योंकि B > 90° हैं

$\therefore \angle B > \angle A + \angle C$

- *Similar Triangles/समरूप त्रिभुज:* If all the angles of a triangle are equal to the angles of another triangle, then both are called similar triangles [relation [represented as ~] to each other./यदि एक त्रिभुज के सभी कोण दूसरे त्रिभुज के कोणों के बराबर हैं, तो दोनों को एक दूसरे के समरूप त्रिभुज कहा जाता है।

Condition for similarity

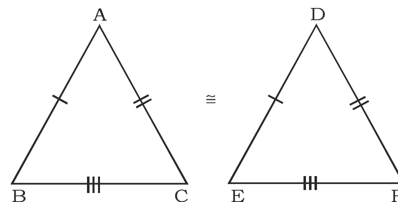


Here, $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B'. \angle C = \angle C'$, then ΔABC and $\Delta A'B'C$ will be similar. So $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$

- *Congruent Triangles/सर्वांगसम त्रिभुज:* Any two triangles are called congruent triangles (relation represented as ≅), when a triangle covers totally the other triangle. In other words if both triangles are exactly same (identical) to each other in sides or angles.

किसी भी दो त्रिभुजों को सर्वागसम त्रिभुज (≅ संबंध के रूप में दर्शाया गया है) कहा जाता है, जब एक त्रिभुज पूरी तरह से दूसरे त्रिकोण को कवर करता है। दूसरे शब्दों में यदि दोनों त्रिभुज पक्षों या कोणों में एक दूसरे के बिल्कुल समान (समान) हैं।



Here, in ΔABC and ΔDEF

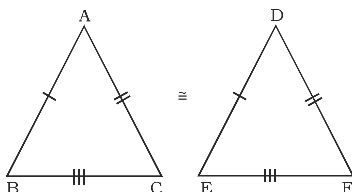
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$, and AB = DE, BC = EF, CA = FD then

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Congruency conditions/ सर्वांगसमता का नियम:

- S–S–S (Side–Side–Side): Here, AB = DE, BC = EF and AC = DF, then

  $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ by S–S–S congruency condition.

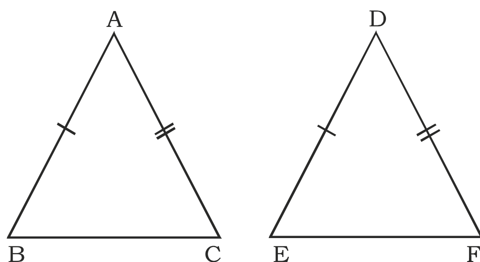


- *S–A–S (Side–Angle–Side):*

  Here, AB = DE , AC = DF

  and $\angle A = \angle D$ then

  $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ by SAS congruency condition.



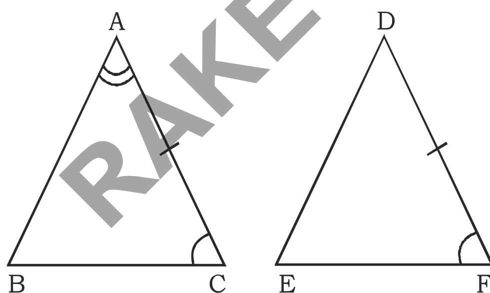
Note/नोट: The angle involved in SAS condition must lie between the sides.

SAS स्थिति में शामिल कोण पक्षों के बीच होना चाहिए।

- *A–S–A (Angle–Side–Angle):*

  Here, $\angle A = \angle D, \angle C = \angle F$ and AC = DF, then

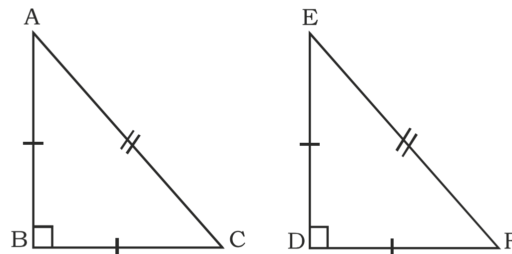
  $\therefore \Delta ABC \cong \Delta AEF$ by ASA congruency condition.



Note/नोट: The side involved in ASA condition must lie between the angles.

ASA स्थिति में शामिल पक्ष कोणों के बीच होना चाहिए।

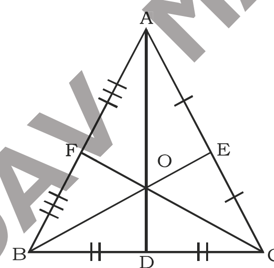
R.H.S (Right–Hypotenuse–Side):



If any two sides of a right angled triangle are equal (separately) to any two corresponding sides of another right angled triangle then both triangles are congruent./यदि एक समकोण त्रिभुज की कोई भी दो भुजाएँ दूसरे समकोण त्रिभुज की किन्हीं दो संगत भुजाओं के बराबर (अलग-अलग) हैं, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

Here, $\angle B = \angle D = 90°$ and AB = DE and AC = EF, then $\therefore \Delta ABC = \cong DEF$

Median/माध्यिका:

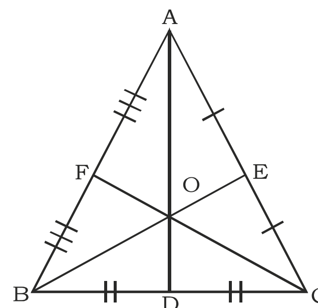


A line drawn from a vertex to the opposite side of a triangle, which divides the side into 2 equal parts is called a median./एक शीर्ष से त्रिभुज के विपरीत दिशा तक खींची गई रेखा, जो पक्ष को 2 बराबर भागों में विभाजित करती है, को माध्यिका कहा जाता है।

Here, AD, BE and CF are medians and BD = DC, CE = AE and AF = BF

यहां, AD, BE और CF माध्य हैं और BD = DC, CE = AE और AF = BF

Centroid (Centre of gravity)/ केन्द्रक (गुरुत्वाकर्षण का केंद्र):



A Centroid (point in figure) is the point of intersection of three median.

एक केन्द्रक (आकृति में बिंदु) तीन माध्य के प्रतिच्छेदन का बिंदु है।

1. *Rule/नियम:* The centroid divides a median in the ratio of 2 : 1 with the larger part towards the vertex, i.e., G divides BE, CF and AD in the ratio of 2 : 1./ केन्द्रक एक माध्य को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, जिसमें शीर्ष की ओर बड़ा भाग होता है, अर्थात, G, BE, CF और AD को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

$= \frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}$

The medians make 6 triangles of equal areas./ माध्य समान क्षेत्रफल के 6 त्रिभुज बनाते हैं।

as– ar ΔAFO = ar ΔFOB = ar ΔOBD = ar ΔODC =

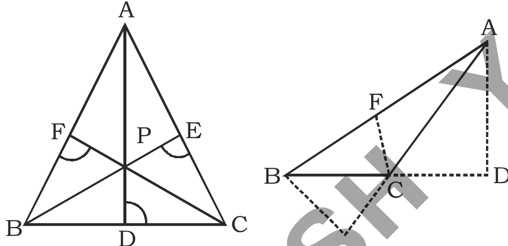
= ar ΔCOE = ar ΔAOE . = $\frac{1}{6}$ ar ΔABC

$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB)^2 + (AC)^2 - BC^2}$

$OD = \frac{1}{3}AD$

$AO = \frac{2}{3}AD$

- *Altitude/ऊंचाई:* An altitude is nothing but the height of a triangle. It is a perpendicular drawn from a vertex to the opposite side./एक ऊंचाई एक त्रिकोण की ऊंचाई के अलावा कुछ भी नहीं है। यह एक लंबवत है जो एक शीर्ष से विपरीत दिशा में खींचा जाता है।

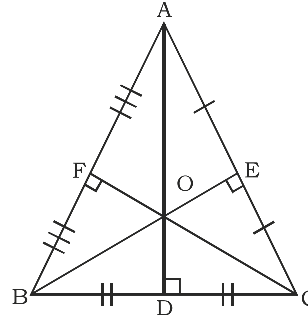


A triangle can have three altitudes. In case of an obtuse triangle atleast one altitude lies out side the triangle. AD, BE and CF are altitudes./एक त्रिभुज की तीन ऊँचाई हो सकती है। एक तिरछे त्रिभुज के मामले में, त्रिभुज के किनारे कम से कम एक ऊंचाई होती है। AD, BE और CF ऊंचाई हैं।

- *Perpendicular Bisector/लंबवत द्विक्षेत्र:*

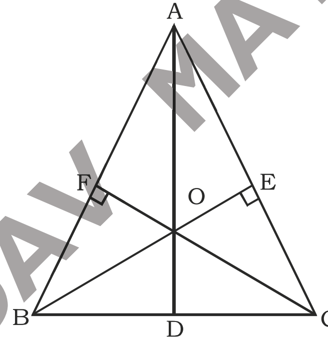
A line that bisect a side of the triangle at right angle is called the perpendicular Bisector. OD is the perpendicular bisector of BC if BD = DC and $\angle ODC = \angle ODB = 90°$.

एक रेखा जो समकोण पर त्रिभुज के एक पक्ष को विभाजित करती है, लंबवत बाइसेक्टर कहलाती है। OD BC का लंबवत द्विक्षेत्र है यदि BD = DC और $\angle ODC = \angle ODB = 90°$ ।



- *Ortho centre/लम्ब केन्द्र:*

It is the point of intersection of three Altitudes of a triangle. In ΔABC . O is the Orthocentre./ऑर्थो केंद्र: यह एक त्रिभुज के तीन ऊंचाई के चौराहे का बिंदु है। में। ओ ऑर्थोसेंटर है।



Here, AD, BE and CF are altitudes of ΔABC .

$\therefore \angle BOC + \angle A = 180°$

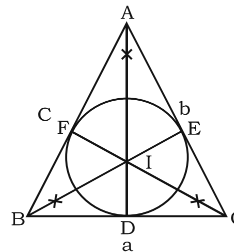
$\angle AOB + \angle C = 180°$

$\angle COA + \angle B = 180°$

AO × OD = BO × OE = CO × OF

- *Incentre/अंत: केन्द्र:*

The point of intersection of the Angle Bisectors of a triangle is calle dthe Incentre./एक त्रिभुज के कोण द्विगुणकों के प्रतिच्छेदन का बिंदु अंत: केंद्र कहलाता है।



$\frac{AI}{ID} = \frac{c+b}{a}$

$\frac{BI}{IE} = \frac{a+c}{b}$

$\frac{CI}{IF} = \frac{a+b}{2}$

$\angle BIC = 180° - \frac{B+C}{2} = 90° + \frac{A}{2}$

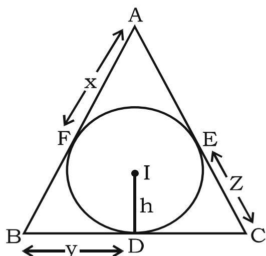
$\boxed{r = \frac{\Delta}{S}}$

Where,

Δ → Area of triangle/त्रिभुज का क्षेत्रफल

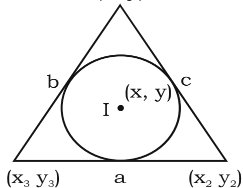
S → Semiperimeter./सेमीपेरिमीटर।

R → inradius/अत: त्रिज्या



Area (ABC) = $\sqrt{(x+y+z)\times xyz}$

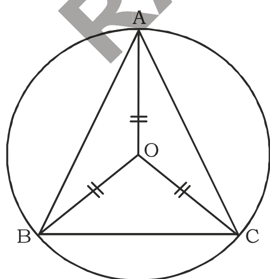
r = $\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$



(x, y) = $\left|\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}\right|, \left|\frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right|$

If ΔABC , given above AD, BE and CF are the angle bisectors of A, B and C respectively. Therefore O is the incentre, and OD, OE and OF are in-radii./ यदि, AD के ऊपर दिया गया है, तो BE और CF क्रमश: A, B और C के कोण विभाजक हैं। इसलिए ओ इनसेंटर है, और OD, OE और OF अत: त्रिज्या हैं।

Circumcentre/ परिकेन्द्र:



The point of intersection of the Perpendicular Bisectors of the sides of a triangle is called the circumcentre.

एक त्रिभुज की भुजाओं के लंबवत बाइसेक्टर के प्रतिच्छेदन बिंदु को परिकेंद्र कहा जाता है।

Here, O is the circum centre and OA, OB and OC are circum radii.

यहां, O परिकेन्द्र है और OA, OB और OC परित्रिज्या हैं।

Here, $\angle BOC = 2\angle A, \angle COA = 2\angle B, \angle AOB = 2\angle C$.

$\angle BOC = 2\angle A$

$\boxed{R = \frac{abc}{4\Delta}}$

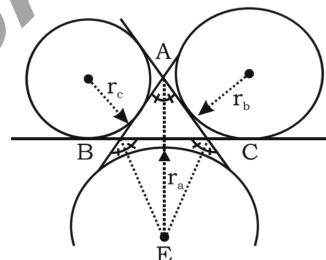
- *Relation between Incentre and circumcentre/ इनसेंटर और परिकेन्द्र के बीच संबंध*

  In any triangle/कोई भी त्रिभुज में = $\sqrt{R^2 - 2Rr}$

- **Excentre/बहिकेन्द्र**

  The intersection point of internal angle bisector of one angle and bisector of other two opposite exterior angles.

  एक कोण के आन्तरिक समद्विभाजक तथा अन्य दो बाह्य विपरीत कोणों के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को बहिकेंद्र कहते हैं।



(a) $\angle BEC = 90° - \frac{\angle A}{2}$

(b) ex-radii:

$r_a = \frac{\Delta}{s-a}$; $r_b = \frac{\Delta}{s-b}$; $r_c = \frac{\Delta}{s-c}$

(c) $r_a = \frac{rs}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

where, $S = \frac{a+b+c}{2}$

(d) Δ (area) = $\sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$

(e) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

(f) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = S^2$

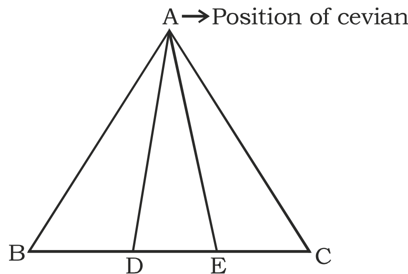
(g) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2S^2$

(h) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

Cevian (केवियन)

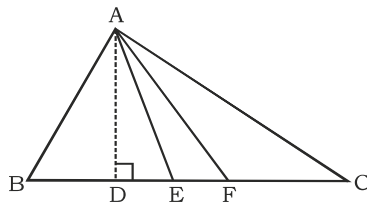
- Cevian $\rightarrow$ Any random line which joins vertex to opposite side

  केवियन $\rightarrow$ कोई भी यादृच्छिक रेखा जो शीर्ष को विपरीत भुजा से जोड़ती है।



AD, AE are cevians/ AD, AE केवियन हैं

- ΔABC is scalene Δ / ΔABC विषमबाहु Δ है



AC > AB

$\therefore \angle B > \angle C$

$\perp$ AD will be near to largest among B and C i.e. angle $\angle B$ and far from small angle $\angle C$.

$\perp$ AD, $\angle B$ और $\angle C$ कोण में से सबसे बड़े $\angle B$ के निकट होगा और छोटे कोण $\angle C$ से दूर होगा।

AE $\rightarrow$ Angle bisector of $\angle A$

AE $\rightarrow$ $\angle A$ का कोण द्विभाजक

AF $\rightarrow$ median i.e. BF = FC

AF $\rightarrow$ माध्यिका यानी BF = FC

- AD $\rightarrow$ Altitude/ऊंचाई

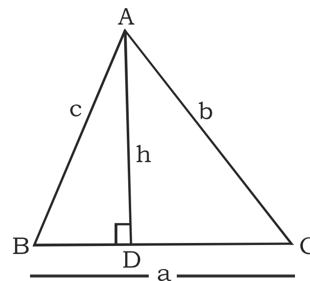
  AE $\rightarrow$ Angle bisector of $\angle A$

  AE $\rightarrow$ $\angle A$ का कोण द्विभाजक

$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$

- A + B + C = 180°

➢ *Sine Rule/ज्या-नियम*



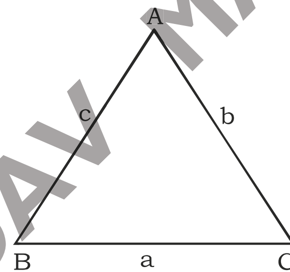
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K(\text{constant})$

a:b:c = KsinA : KsinB : KsinC

a:b:c = sinA : sinB : sinC

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$

➢ *Cosine Rule/ कोज्या-नियम*



$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

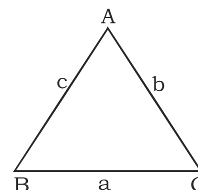
$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

➢ *Area of triangle (त्रिभुज का क्षेत्रफल)*

- Area of $\Delta = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height

  Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

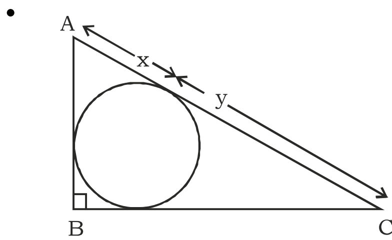
- *Heron's formula(हिरोन का नियम)*



$S = \frac{a+b+c}{2}$

Area of $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

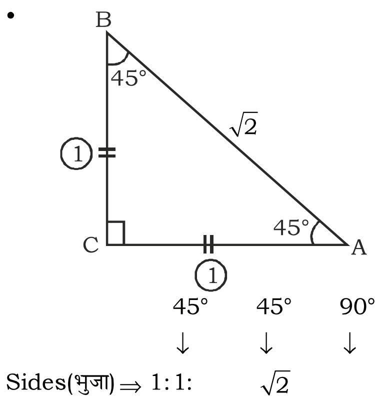
•



Ar (Δ) = xy.

➢ *Side–Angle ratio of some triangles/ (कुछ त्रिभुजों का भुजा-कोण अनुपात)*

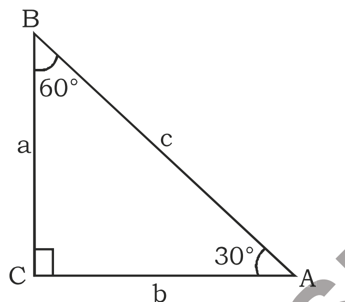
•



45° 45° 90°

↓ ↓ ↓

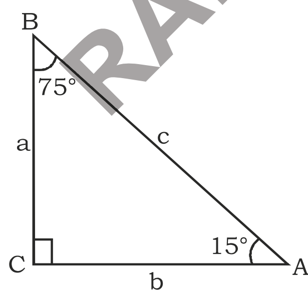
Sides(भुजा) ⇒ 1 : 1 : $\sqrt{2}$



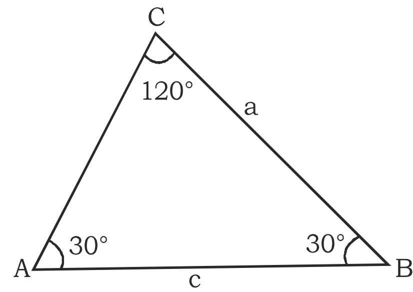
a:b:c = sin30° : sin60° : sin90°

$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

a : b : c = 1 : $\sqrt{3}$: 2

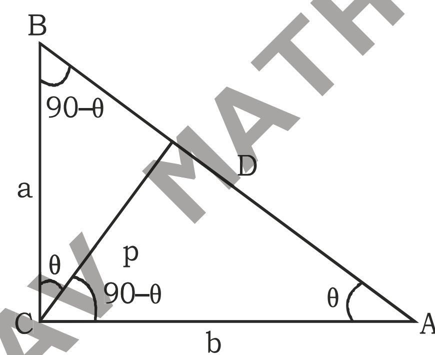


⇒ a : b : c = $\sqrt{3} - 1 : \sqrt{3} + 1 : 2\sqrt{2}$



⇒ a : b : c = 1 : 1 : $\sqrt{3}$

➢ *Some Important point and theorem/ कुछ जरूरी बिंदु और प्रमेय*



ab = cp

• $p = \frac{ab}{c}$

• $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

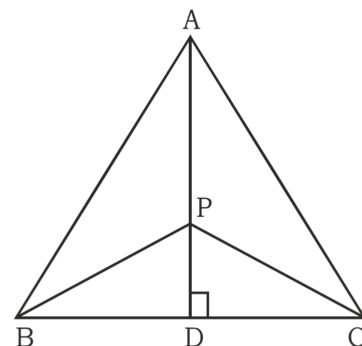
• $CD^2 = BD \times AD$

• $BC^2 = BD \times AB$

• $AC^2 = AD \times AB$

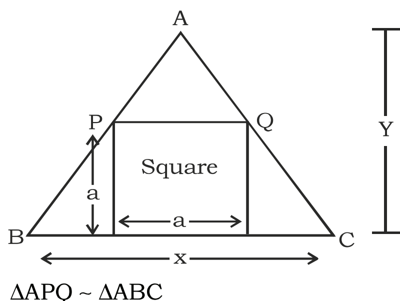
• $\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{BD}{AD}$

•



$AB^2 + PC^2 = AC^2 + BP^2$

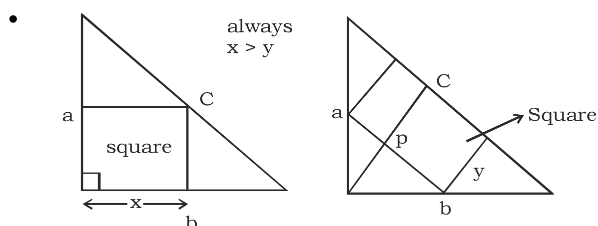
- *For any Triangle/किसी भी त्रिभुज के लिए*



$\Delta APQ \sim \Delta ABC$

$$\boxed{a = \frac{xy}{x+y}}$$

-

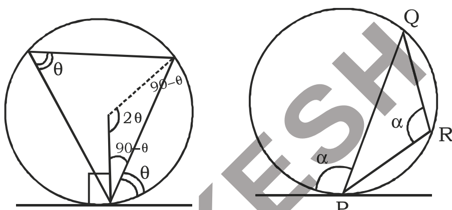


$$\boxed{x = \frac{ab}{a+b}} \qquad \because \; p = \frac{ab}{c}$$

$$y = \frac{c \times p}{c+p} = \frac{ab}{c + \frac{ab}{c}}$$

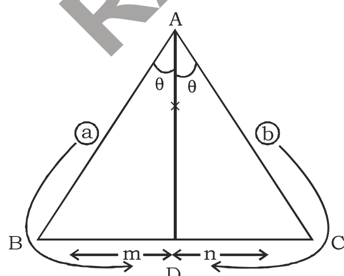
$$\boxed{y = \frac{abc}{a^2 + b^2 + ab}}$$

- Alternate Segment Theorem/वैकल्पिक खंड प्रमेय



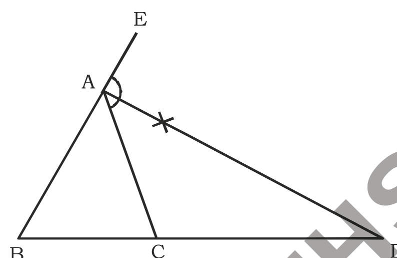
- *Angle bisector theorem/कोण द्विभाजक प्रमेय*

(a) Interior Angle bisector theorem/आंतरिक कोण द्विभाजक प्रमेय



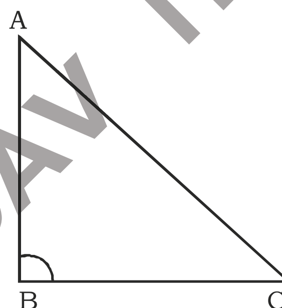
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \; or \; \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}}$$

(b) Exterior Angle bisector theorem/बाह्य कोण द्विभाजक प्रमेय



$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}}$$

- *Pythagoras theorem/पाईथागोरस प्रमेय:*

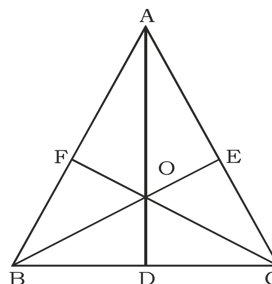


In any right angled triangle $AB^2 + BC^2 = AC^2$,/ किसी भी समकोण त्रिभुज में $AB^2 + BC^2 = AC^2$

where/जहाँ

AB is Perpendicular, BC is Base, AC is Hypothetical/AB लम्ब है, BC आधार है जब कि AC कर्ण है।

- *Ceva's Theorem/सिवास प्रमेय*



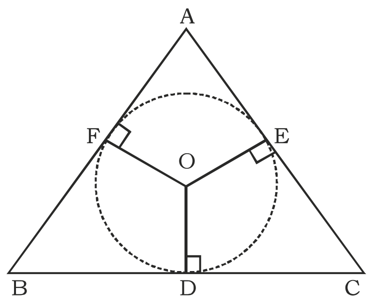
(i) $\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{AE} = 1$

(ii) $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$

(iii) $\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF} = 2$

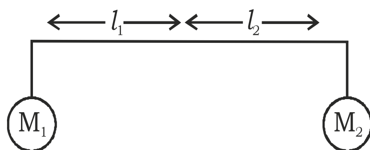
(iv) $\frac{AO}{OD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}$

•



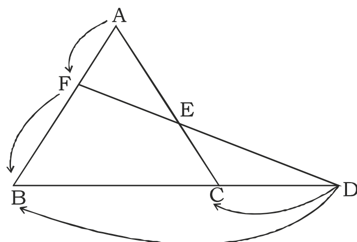
$AF^2 + BD^2 + CE^2 = FB^2 + DC^2 + AE^2$

• Mass point geometery theorem./द्रव्यमान बिन्दु प्रमेय



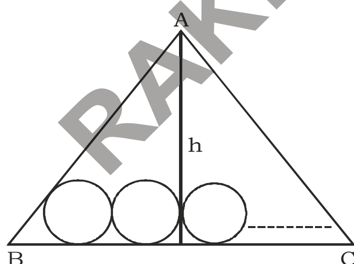
$\Rightarrow m_1l_1 = m_2l_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{l_2}{l_1}$

•



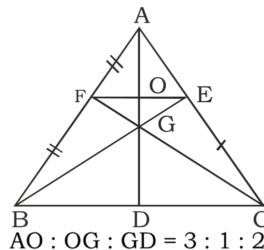
$= \frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$

• n circle of equal radius are made on base of a triangle/n समान त्रिज्या का वृत्त एक त्रिभुज के आधार पर बनाया गया है



$r = \frac{\Delta}{s+(n-1)h}$ → Δ → area of ABC; h → height; $(n-1)$ → no. of circle; s → Semi perimeter

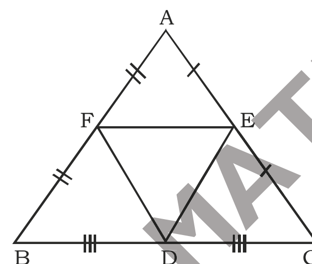
•



AO : OG : GD = 3 : 1 : 2

EF | | BC and EF = $\frac{1}{2}$ BC

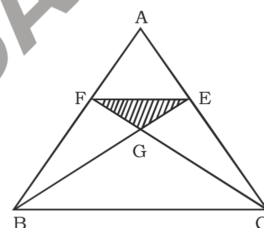
• *Medial Triangle/ माध्यिका त्रिभुज*



Perimeter of $\Delta DEF = \frac{1}{2}$ peri. of (ABC)

area $(\Delta DEF) = \frac{1}{4}$ area (ABC)

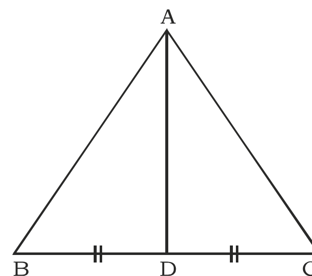
•



Area (EFG) = $\frac{1}{12}$ area of (ABC)

• *Apollonius theorem/ अपोलोनियस प्रमेय:*

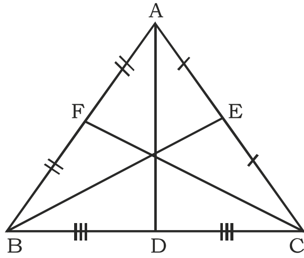
To find the length of median/माध्य की लंबाई ज्ञात करने के लिए



$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

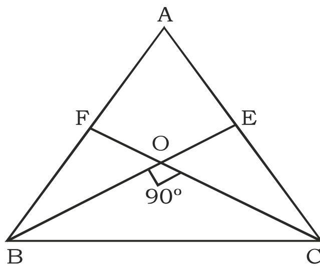
Or

$AB^2 + AC^2 = 2\left(AD^2+\frac{BC^2}{4}\right)$

- 

$$\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{AD^2+BE^2+CF^2}=\frac{4}{3}$$

$$1<\frac{AB+BC+CA}{AD+BE+CF}<\frac{4}{3}$$

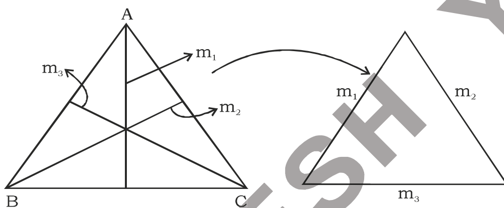
- 

$AB^2 + AC^2 = 5\ BC^2$

If AB = AC

$\therefore$ Isoceles triangle, then/समद्विबाहु त्रिभुज $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{5}{2}$

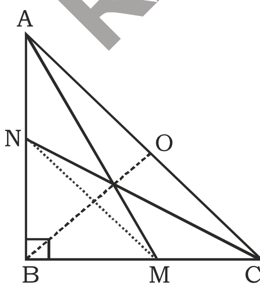
Also If ΔBOC = x then ABC = 3 × x for any triangle.

- 

Sm = $\frac{m_1+m_2+m_3}{2}$

area of ABC

$= \frac{4}{3}\sqrt{S_m\times(S_m-m_1)\times(S_m-m_2)\times(S_m-m_3)}$

- 

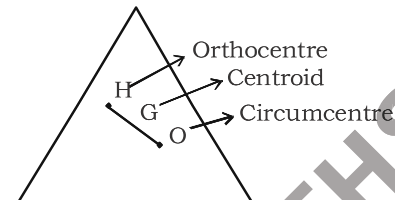
$AM^2 + CN^2 = AC^2 + MN^2$

$4\ (AM^2 + CN^2) = 5AC^2$

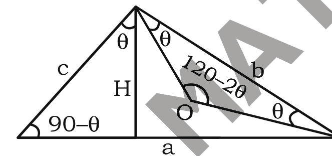
$$\boxed{MN=\frac{AC}{2}}$$

$AM^2 + CN^2 = 5\ BO^2$

- *EULER'S line/ऑयलर रेखा*



HG : GO = 2 : 1

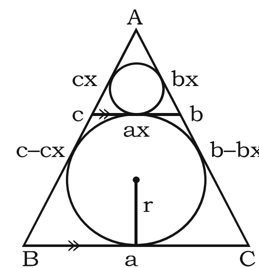


H = orthocentre/लम्ब केन्द्र

O = circumcentre/बाह्य केन्द्र

$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$

$$\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2} < h_3 < \frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}$$



$$\frac{r(b+c-a)}{(a+b+c)}$$

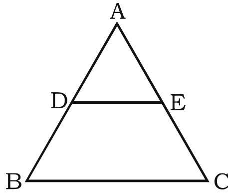
$$x=\frac{b+c-a}{a+b+c}$$

$(a + b + c)x = b + c - a$

(D) *Mid-point Theorem (Thales theorem)/मध्यबिन्दुप्रमेय (थेल्सप्रमेय)*

(a) **(i)** The line segment joining the mid-points of any two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of the third side./किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर और तीसरी भुजा का आधा होता है।

(ii) A line drawn parallel to the one side of a triangle and the length of the line is half of that of the side, the line will pass through the mid-points of the other two sides./किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई कोई रेखा और रेखा की लंबाई भुजा के आधी हो तो रेखा अन्य दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से होकर गुजरेगी।



(b) If D and E are mid-points of AB and AC, respectively, then/यदि D और E क्रमशः रेखा AB और AC के मध्य बिन्दु हों, तो

DE || BC and DE = $\frac{BC}{2}$

(c) DE || BC and DE = $\frac{BC}{2}$, then D are E are the mid-points of AB and AC respectively.

In this case/यदि DE || BC और DE = $\frac{BC}{2}$, तो D और E क्रमशः AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। इस स्थिति में

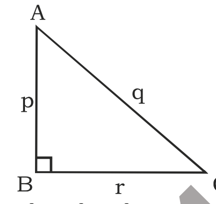
(i) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$

(iii) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$

- Triplets (त्रिक)



$q^2 = p^2 + r^2$

(3, 4, 5) (5, 12, 13) (7, 24, 25)
(8, 15, 17) (9, 40, 41) (11, 60, 61)
(20, 21, 29) (28, 45, 53) (33, 56, 65)
(12, 35, 37) (16, 63, 65) (13, 84, 85)
(39, 80, 89) (36, 77, 85) (65, 72, 97)
(20, 99, 101)

(3, 4, 5) $\xrightarrow{\times 2}$ (6, 8, 10) same as for other

QUADRILATERAL
चतुर्भुज
CHAPTER 28

Quadrilateral: Any closed figure that has four sides is called a quadrilateral.

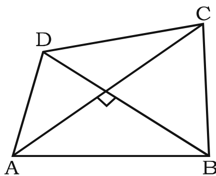
चतुर्भुज: कोई भी बंद आकृति जिसकी चार भुजाएँ हों, चतुर्भुज कहलाती हैं।

➢ Sum of interior angles of a quadrilateral/चतुर्भुज के अंतःकोणों का योगफल = 360°

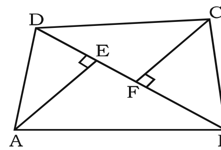
i.e., $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

➢ If diagonals of the quadrilateral intersect each other at 90°, then/यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करे तो,

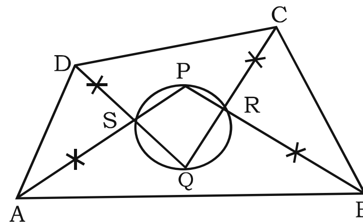
$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$



➢ Area of quadrilateral/चतुर्भुज का क्षेत्रफल



➢ Quadrilateral formed by angle bisect of a quadrilateral will always be cyclic quadrilateral./किसी चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक द्वारा गठित चतुर्भुज हमेशा चक्रीय चतुर्भुज होगा।



$\angle P = \frac{\angle C + \angle D}{2}$

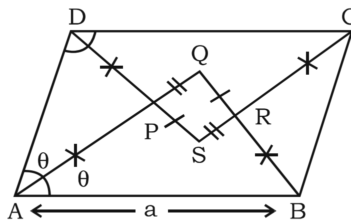
$\angle Q = \frac{\angle A + \angle B}{2}$

$\angle P + \angle Q = 180°$

hence, PQRS is cyclic

- Quadrilateral formed by joinning the angle bisector of a Parallelogram will always be a Rectangle.

  एक संमातर चतुर्भुज के कोण द्विभाजक को मिलाने से बना चतुर्भुज हमेशा एक आयत होगा।



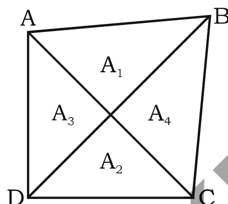
AQ = a cos θ

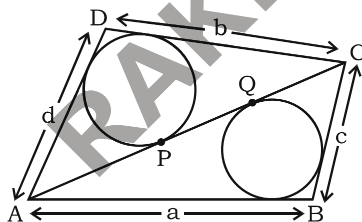
AP = b cos θ

PQ = (a – b) cos θ

PS = (a – b) sin θ

- If BO and CO are tha angle bisectors or angles $\angle B$ and $\angle C$, respectively, then/यदि BO तथा CO क्रमशः $\angle B$ और $\angle C$ के कोण समद्विभाजक हो तो:
- If ABCD is any quadrilateral, A, B, C, D are areas, then/यदि ABCD कोई चतुर्भुज है, तो A, B, C, D क्षेत्रफल हैं, तो $A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$





$PQ = \frac{(a+b)-(c+d)}{2} =$

- **Quadrilateral formed by joining the mid point of sides of another quadrilateral.**

  एक अन्य चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिंदु को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज।

Scalene quadrilateral/विषमबाहु चतुर्भुज → Parallelogram/समांतर चतुर्भुज

Square/वर्ग → Rhombus/सम चतुर्भुज

Rectangle/आयत → Rhombus/सम चतुर्भुज

Rhombus/सम चतुर्भुज→ Rectangle/आयत

Parallelogram/संमातर चतुर्भज→ Parallelogram/संमातर चतुर्भज

- **Types of quadrilaterals:/चतुर्भुज के प्रकार**

  Depending on length of sides, orientation, they can be classified as follows.

  पक्षों की लंबाई, अभिविन्यास के आधार पर, उन्हें निम्नानुसार वर्गीकृत किया जा सकता है।

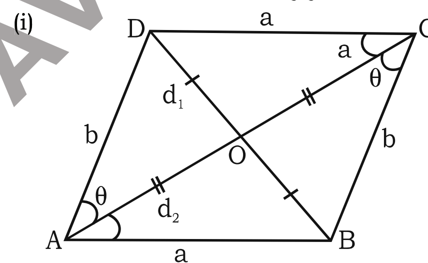
I. Parallelogram → Rectangle, Rhombus → Square

II. Trapezium (Trapezoid) → Isosceles trapezium

III. Kites

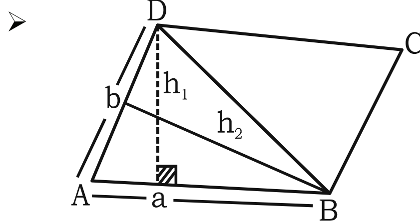
1. Parallelogram/समांतर चतुर्भुज

(i)



- Parallelogram: Opposite sides are equal and parallel./समांतर चतुर्भुजः सम्मुख भुजाएँ समान और समांतर होती हैं।
- AB = DC and AD = BC
- $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C =$
  $\angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$
- $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$
- The diagonals bisect each other i.e. AO = OC and OB = OD/विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं अर्थात AO = OC और OB = OD
- All rectangles are parallelogram but all parallelogram are not rectangles./सभी आयत समांतर चतुर्भुज हैं लेकिन सभी समांतर चतुर्भुज आयत नहीं हैं।
- ar (AOB) = ar (Δ BOC) = ar (Δ DOC) = ar (Δ AOD)
  $= \frac{1}{4}$ area of ||gm ABCD
- $BD^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2)$

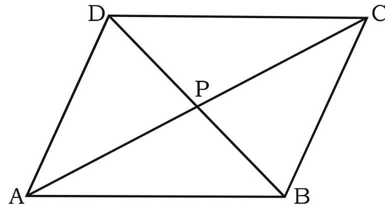
OR

- $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$
- ar (□ABCD) = $ab \sin\theta$
- 

$ah_1 = bh_2$

$\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}$

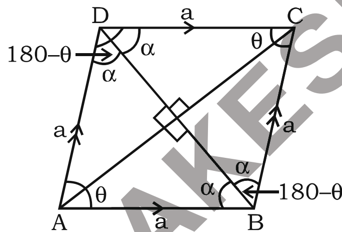
- area (||gm ABCD) = $\frac{1}{2} d_1 \times d_2 \sin\theta$



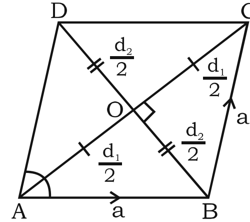
ar(APB) + ar(DPC) = ar (APD) + ar(BPC)

1. (a) Rhombus/समचतुर्भुज

- Rhombus is a type of parallelogram with all sides equal and diagonals bisect each other at 90°.
समचतुर्भुज एक प्रकार का समांतर चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ समान होती हैं और विकर्ण एक दूसरे को 90° पर काटते हैं।



- All sides are equal/सभी भुजाएँ समान हैं।
- $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$
- Diagonal bisect vertex angle.
विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजक करते हैं।
- Diagonal bisect rhombus into two equal areas.
विकर्ण समचतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफलों में विभाजित करता है।
- AC ≠ BD
- All 4 Δ made by two diagonals are congruent.
दो विकर्ण द्वारा बनाए गए सभी 4 Δ सर्वांगसम होते हैं।
- $AO = OC = \frac{AC}{2}$ and $BO = OD = \frac{BD}{2}$
- Diagonal bisect each other at 90°.
विकर्ण परस्पर 90° पर समद्विभाजक करते है।



$\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} = a^2$

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

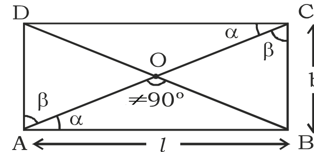
Area of Δ BOC = $\frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$

Area of rhombus/समचतुर्भुज का क्षेत्र = $4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$

$= \frac{d_1 \times d_2}{2}$

Perimeter/परिमाप = 4a

1. (b) Rectangle/आयत



A parallelogram is called a rectangle if its all angles are 90°./एक समांतर चतुर्भुज को आयत कहा जाता है यदि इसके सभी कोण 90° के हों।

Hence every rectangle is a parallelogram but every parallelogram is not a rectangle.

अत: प्रत्येक आयत एक समांतर चतुर्भुज है लेकिन प्रत्येक समांतर चतुर्भुज आयत नहीं है।

If diagonals of a parallelogram are equal (i.e. AC = BD) then it is a rectangle.

यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हैं (अर्थात् AC = BD) तो यह एक आयत है।

Ar(ABC) = Ar(BCD) = Ar(ACD) = Ar(ADB) = $\frac{1}{2}$Ar(ABCD)

Ar(OAB) = Ar(OBC) = Ar(OCD) = Ar(OAD) = $\frac{1}{4}$Ar(ABCD)

Properties/गुण:

(i) Diagonals are equal and bisect each other, but not necessarily bisects at right angles.
विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, लेकिन आवश्यक नहीं कि समकोण पर समद्विभाजित करें।

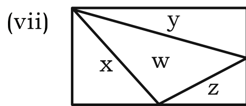
(ii) For the given perimeter of rectangles, a square has maximum area.
दिए गए आयतों के परिमाप के लिए, एक वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

(iii) The figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a rectangle is rhombus.
आयत की संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति समचतुर्भुज होती है।

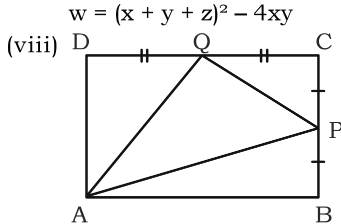
(iv) Area of rectangle ABCD = length × breadth = 1 × b
आयत ABCD का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 1 × b

(v) Diagonals of a rectangle/आयत के विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2}$

(vi) Bisectors of the angles of a rectangle form another rectangle.
एक आयत के कोणों के समद्विभाजक एक अन्य आयत बनाते हैं।

(vii)


$w = (x + y + z)^2 - 4xy$

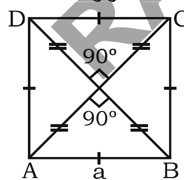
(viii)


$$\frac{Ar(\Delta APQ)}{Ar(\Delta ABC)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{area}(\Delta APQ)}{\text{area of}||\text{gm ABCD}} = \frac{3}{8}$$

4. Square/वर्ग

A square is a rectangle with adjacent sides of equal length or a rhombus with each angle 90°.
एक वर्ग एक आयत है जिसकी आसन्न भुजाएँ समान लंबाई की हैं या एक समचतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण 90° है।



$Ar(ABC)=Ar(BCD)= Ar(CDA)=Ar(ADB)=\frac{1}{2}a^2$

$Ar(OAB) = Ar(OBC) = Ar(OCD) = Ar(ODA) = \frac{1}{4}a^2$

Properties/गुण

(i) AB = BC = CD = AD = a (side) & $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

(ii) Diagonals are equal and bisect each other at right angle.
विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

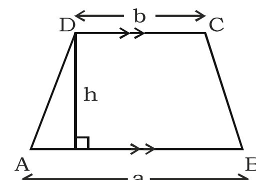
(iii) The figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a square is a square.
एक वर्ग की संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति एक वर्ग होती है।

(iv) Every square is a rhombus but every rhombus is not a square.
प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है लेकिन प्रत्येक समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं है।

(v) Perimeter of square/वर्ग का परिमाप = 4 × side of square/वर्ग की भुजा = 4 × a

(vi) Area/क्षेत्रफल = $(\text{side})^2 = a^2 = \frac{d^2}{2}$, and diagonal/विकर्ण (d) = $a\sqrt{2}$.

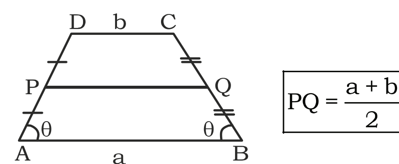
2. Trapezium: A Quadilateral in which Only one pair of opposite sides is parallel.
समलंब: सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समांतर होता है।

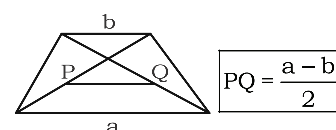


Area of trapezium ABCD/समलंब ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}(a + b) \times h$

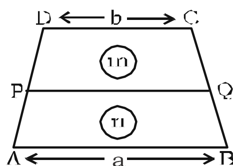
2. (a) Isosceles Trapezium/समद्विबाहु समलंब:-

If AD = BC, then Trapezium is called Isoceles trapezium





Q & P is mid point of diagonal

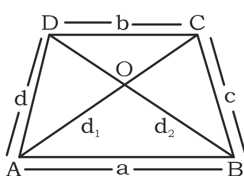


$PQ = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m+n}}$

If PQ divide into two equal area m : n = 1 : 1

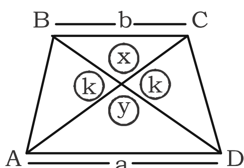
यदि PQ दो समान क्षेत्रफल m : n=1:1 में विभाजित होता है

$PQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$



OA × OD = OB × OC

$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$

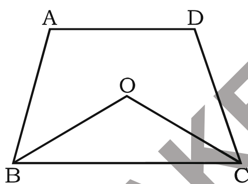


$k = \sqrt{xy}$ ar(Δ ADB) =ar(Δ ACD)

x : y = b² : a²

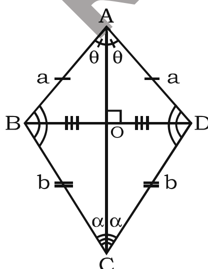
Each isosceles trapezium is cyclic quadilateral and vice-versa.

प्रत्येक समद्विबाहु समलंब, चक्रीय चतुर्भुज होता है और इसके विपरीत।

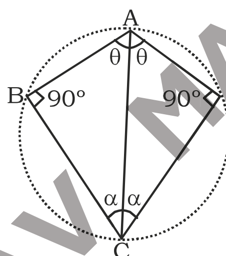


$\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

3. *Kites*



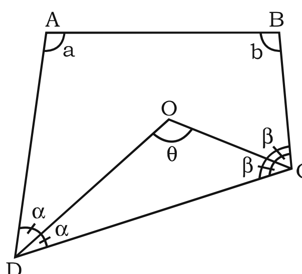
- A kite has 2 distinct pairs of equal adjacent sides (Here AB = AD, CB = CD)
  एक पतंग में समान आसन्न भुजाओं के 2 अलग-अलग जोड़े होते हैं (यहाँ AB = AD, CB = CD)
- Diagonals cut at 90 (AC ⊥ BD)
  विकर्ण 90 पर कटे (AC ⊥ BD)
- One of the diagonals bisects the other (AC bisects BD ; BO = OD)/एक विकर्ण दूसरे को समद्विभाजित करता है (AC, BD को समद्विभाजित करता है; BO = OD)
- Perimeter/परिमाप = 2(a + b)
- Area = $\frac{1}{2}$ x AC x BD = $\frac{1}{2}$ x d_1 x d_2
- Area = ab sin θ [∠ABC = ∠ADC]



- If ∠ABC = ∠ADC = 90, the kite ABCD is a cylic quadrilateral.
  यदि ∠ABC = ∠ADC = 90 है, तो पतंग ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
- AC = diameter of the circle/वृत्त का व्यास
- $2(\theta + a) = 180 \Rightarrow \theta + a = 90$
- If a = b (i.e. AB = BC) then kite becomes rhombus./ यदि a = b (अर्थात् AB = BC) तो पतंग समचतुर्भुज बन जाती है।

SOME OTHER GENERALISATION & THEOREM

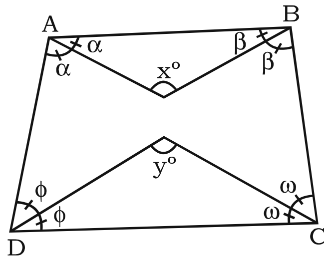
- GENERALISATION 1:



If DO and CO are angle bisectors of ∠ADC and ∠BCD then,/यदि DO और CO, ∠ADC और ∠BCD के कोण समद्विभाजक हैं, तो,

$\angle DOC = \theta = \frac{a+b}{2}$

- GENERALISATION 2 :

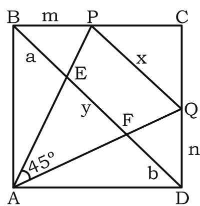


$x = \frac{2\omega + 2[\phi]}{2}$, $y = \frac{2\alpha + 2\beta}{2}$

$x = \omega + \phi$, $y = \alpha + \beta$

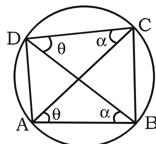
$x + y = 180°$

- GENERALISATION 3:



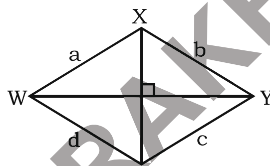
- ABCD is a Square
- APQ is a triangle ($\angle PAQ = 45°$)
- $x = m + n$
- $x^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $y^2 = a^2 + b^2$

- GENERALISATION 4:

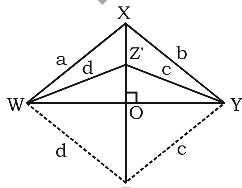


$\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$

- GENERALISATION 5:



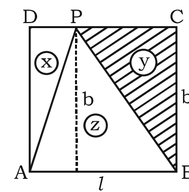
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$



$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

- GENERALISATION 6:

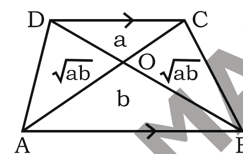
वर्ग/आयत/समांतर चतुर्भुज/समचतुर्भुज ABCD में



$\frac{\text{Area } \Delta \text{ APB}}{\text{Area } \Delta \text{ ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times l \times b}{l \times b} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\text{Shaded Area}}{\text{Area ABCD}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ Area of (x + y) = Area of z

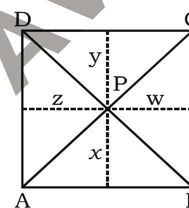
- GENERALISATION 7:



Δ AOD $\sim$ Δ COD

Ar(AOD) = Ar(OCB)

➢ **Slan's theorem**



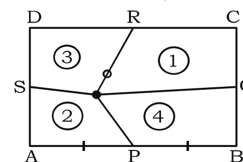
Note:- AC and BD are not diagonals.

नोट:- AC और BD विकर्ण नहीं हैं।

➢ P is any point inside/P अंदर कोई बिंदु है।

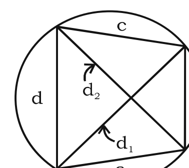
$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

$x^2 + z^2 + w^2 + y^2 = x^2 + w^2 + y^2 + z^2$



$1 + 2 = 3 + 4 = \frac{1}{2}$ area(ABCD)

➢ **Dolmee theorem**



$ac + bd = d_1 \times d_2$

CIRCLE
वृत्त

CHAPTER
29

➢ ***Circle/वृत्त***

A circle is a shape with all points at the same distance from its center.

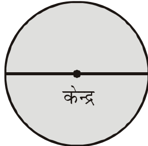
एक वृत्त वह आकृति होती हैं जिसके सभी बिन्दु केन्द्र से समान दूरी पर होते है।



➢ ***Diameter/व्यास***

The distance across a circle through the center is called the diameter.

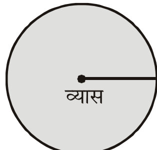
वृत्त के केन्द्र से गुजरने वाली जीवा व्यास कहलाती है।



➢ ***Radius/त्रिज्या***

The distance between the centre and a point lies on the circumference of a circle is called radius.

केन्द्र और वृत्त की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु के बीच की दूरी त्रिज्या कहलाती हैं।

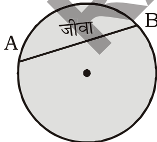


Radius/त्रिज्या= $\frac{\text{Diameter / व्यास}}{2}$

➢ ***Chord/जीवा***

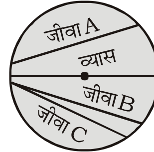
A chord is a line segment that joins two points on a curve. The circle to below contains chord AB.

एक जीवा वह रेखा होती हैं जो वृत्त की परिधि पर स्थित दो बिन्दु को मिलाती है। नीचे दिखाए गए वृत्त में रेखा AB एक जीवा है।



A circle has many different chords some chords are passes through the center called diameter.

एक वृत्त में बहुत सारी जीवाएं होती हैं कुछ जीवाएं केंद्र से गुजरती हैं जिन्हें व्यास कहा जाता है।



➢ ***Arc/चाप***

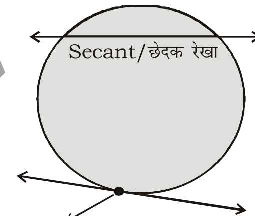
A continuous piece of a circle is called an arc of the circle.

किसी वृत्त का एक सतत टुकड़ा वृत्त का चाप कहलाता है।

➢ **Secant/छेदक रेखा**

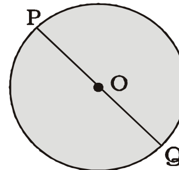
A line which intersects a circle in two distinct points is called a "Secant".

किसी वृत्त की छेदक रेखा वह रेखा है जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

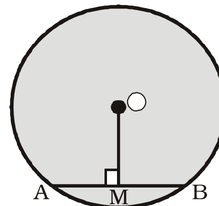


➢ ***PROPERTIES OF CIRCLE/वृत्त की विशेषताएं***

1. A chord which passes through the centre is called the diameter of the circle.It is the largest chord of the circle./ वृत्त के केन्द्र से गुजरने वाली जीवा व्यास कहलाती है। यह वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है।



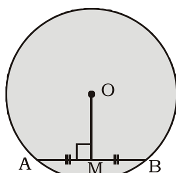
2. The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord./किसी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता हैं



i.e. if OM ⊥ AB, then AM = BM

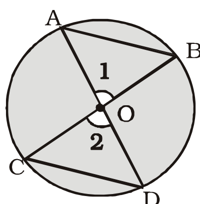
यदि OM ⊥ AB, तब AM = BM

3. Conversion of the above theorem:- The line joining the centre of a circle to the midpoint of a chord is perpendicular to the chord./उपरोक्त प्रमेय का विपरीत:- किसी वृत्त के केन्द्र तथा जीवा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।



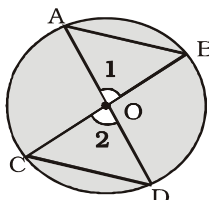
i.e. AM = MB, then OM $\perp$ AB.

4. Equal chords of a circle subtend equal angles at the centre./किसी वृत्त की दो समान जीवाएं केन्द्र पर समान कोण बनाती है।



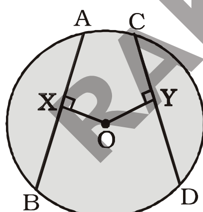
i.e. if AB = CD, then $\angle 1 = \angle 2$.

5. Conversion of the above theorem: Angles subtended by two chords at the centre of a circle are equal then the chords are equal.
उपरोक्त प्रमेय का विपरीत: यदि किसी वृत्त की दो जीवाएं के केन्द्र पर समान कोण बनायें, तो ऐसी जीवाएं बराबर होती है।



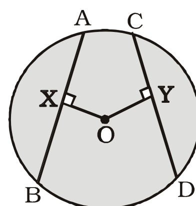
i.e. if $\angle 1 = \angle 2$, then AB = CD.

6. Equal chords of a circle are equidistant from the centre.
किसी वृत्त की समान जीवाएं केन्द्र से समदूरस्थ होती है।



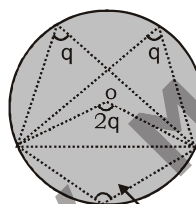
i.e. if AB = CD, OX $\perp$ AB and OY $\perp$ CD, then OX = OY.

7. Conversion of the above theorem : chords equidistant from the centre of the circle are equal./उपरोक्त प्रमेय का विपरीत: यदि किसी वृत्त की दो जीवाएं केन्द्र से समदूरस्थ है तो ऐसी जीवायें परस्पर समान होती हैं।



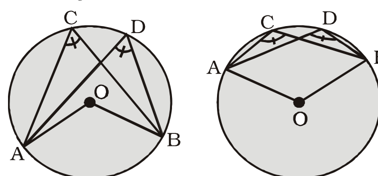
i.e, If OX $\perp$ AB, OY $\perp$ CD and OX = OY then AB = CD.

8. Degree Measure Theorem:- The angle subtended by an chord at the centre of a circle is twice the angle subtended by the chord at any point on the major arc. /डिग्री मापन प्रमेय:- किसी वृत्त के एक चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण इस चाप द्वारा दीर्घ वृत्त-खण्ड में किसी बिंदु पर बने कोण का दुगुना होता है।



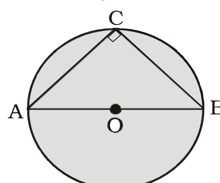
Angle by minor arc is 180 – q
लघु खण्ड चाप द्वारा बना कोण 180 – q
i.e $\angle x$ at the centre and $\angle y$ at the circumference made by the same arc AB, then $\boxed{\angle x = 2\angle y}$
चित्र में चाप AB, केन्द्र O पर $\angle$AOB = x बनाता है तथा दीर्घ चाप वृत्त खंड के बिन्दु C पर $\angle$ACB = Y बनाता है। तो $\boxed{\angle x = 2\angle y}$

9. Angles in the same segment of a circle are equal./एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण परस्पर समान होते हैं।



i.e. $\angle$ACB = $\angle$ADB
(angles in same arc) or (angles in same segment)
(समान वृत्त खण्ड में बने समान कोण)

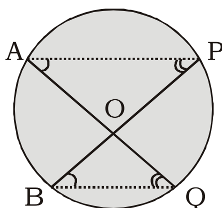
10. The angles in a semi circle is a right angle.
किसी अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।



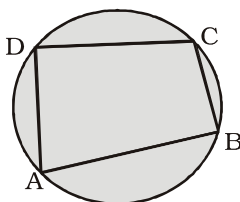
i.e $\angle$ACB = 90°.

11. Conversion of the above theorem : The circle, drawn with hypotenuse of a right triangle as diameter, passes through its opposite vertex.
उपरोक्त प्रमेय का विपरीत: किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण को व्यास लेकर वृत्त खींचा जाए, तो यह वृत्त इसके विपरीत शीर्ष से गुजरता है।

12. If $\angle APB = \angle AQB$, and if P, Q are on the same side of AB, then A, B, Q, & P are concylic i.e. lie on the same circle.
यदि $\angle APB = \angle AQB$, तथा P व Q भुजा AB, के ही ओर स्थित हों तो, A, B, Q, P चक्रीय होंगे तथा एक ही वृत्त पर होगें।



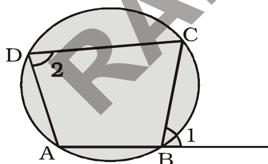
13. The sum of the either pair of the opposite angles of a cyclic quadrilateral is 180°.
किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।



i.e. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

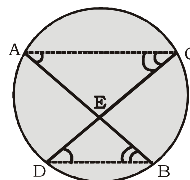
14. Conversion of the above theorem: If the two angles of a pair of opposite angles of a quadrilateral are supplementary,then the quadrilateral is 'cyclic'./
उपरोक्त प्रमेय का विपरीत: यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° हो तो यह एक चक्रीय चतुर्भुज हो सकता है।

15. If a side of a cyclic quadrilateral is produced then the exterior angle is equal to the interior opposite angle.
यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा बढ़ा जी जाए तो इस प्रकार बना बाह्य इसके अभिमुख अंत: कोण के बराबर होता है।



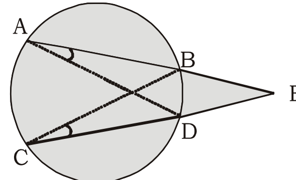
i.e. $\angle 1 = \angle 2$.

16. If two chords AB and CD intersect internally or externally at a point E, then
यदि किसी वृत्त की दो जीवाएं वृत्त के अन्दर या बढ़ाने पर बाहर प्रतिच्छेद करती है, तो



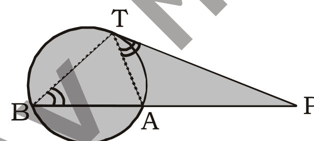
Then, AE×EB = CE ×ED

17.



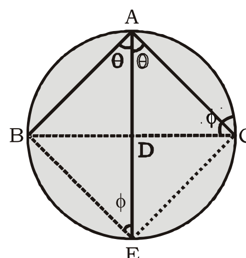
Then, EA × EB = EC × ED

18. If a secant and a tangent externally intersect each other.
यदि किसी वृत्त की छेदक रेखा और स्पर्श रेखा एक दूसरे को बाह्यतम रूप से काटती है।

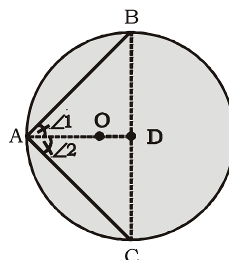


Then, $PT^2 = PA \times PB$

19. AE is angle bisector of $\angle BAC$ then $AB.AC + DE.AE = AE^2$
AE कोंण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है। तब
$AB.AC + DE.AE = AE^2$



20. If two chords AB and AC of a circle are equal, then the bisector of $\angle BAC$ passes through the centre O of the circle. $\angle 1 = \angle 2$ यदि किसी वृत्त की दो जीवाएं AB और AC समान है। तब $\angle BAC$ का कोंण समद्विभाजक वृत्त के केन्द्र से गुजरेगा। $\angle 1 = \angle 2$

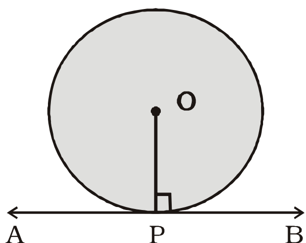


➢ THEOREM ON TANGENTS/स्पर्श रेखाओं पर प्रमेय

- Tangent/स्पर्श रेखा

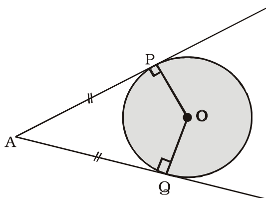
A line meeting a circle in only one point is called tangent./जब कोई रेखा वृत्त को एक ही जगह पर स्पर्श करती हैं तो वह स्पर्श रेखा कहलाती है।

1. A tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact. किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती हैं–



i.e. If AB is a tangent at P, then OP $\perp$ AB. (conversion of this theorem is also true)/अतः यदि AB बिंदु P, पर स्पर्श रेखा है तब, OP $\perp$ AB. (इस प्रमेय का विपरीत भी सत्य हैं।)

2. The lengths of two tangents, drawn from an external point to a circle, are equal./किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।



i.e. AP = AQ.

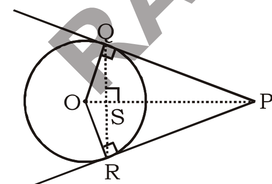
3. When tangents drawn from an external point to a circle किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खीची गई स्पर्श रेखाएं

(a) Tangents are equal in length/स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान होती है।

(b) $\angle$QPO= $\angle$OPR

(c) $\angle$QOP= $\angle$POR

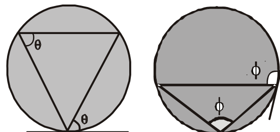
(d) $\frac{PQ}{QO} = \frac{QS}{SO}$



4. Alternate Segment Theorem/एकांतर खण्ड प्रमेय

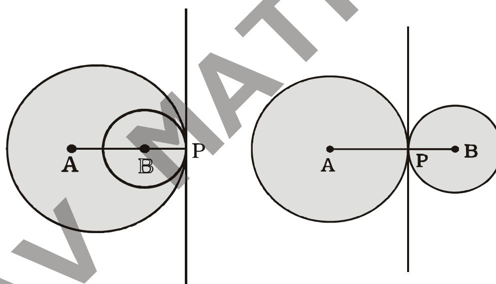
The angle between a chord and a tangent drawn at end point of chord is equal respectively to the angle formed in the corresponding alternate segments.

यदि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खींची जाएं तो इस जीवा द्वारा दो गई स्पर्श रेखा के साथ बनें कोंण, संगत एकांतर खण्डों में बने कोंणों के क्रमशः बराबर होते है।



5. If two circles touch each other internally or externally the point of contact lies on the line joining their centres.

यदि दो वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः A तथा B है बिन्दु P पर स्पर्श करें तो यह बिन्दु AB पर स्थित होगा।



i.e. A, B and P are collinear./अतः A, B तथा P सरेखीय है।

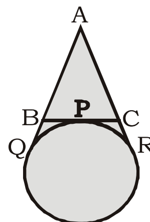
Distance between their centres (d)

उनके केन्द्र के बीच की दूरी (d)

(i) When touch internally/जब आंतरिक स्पर्श करते है, d = AP – BP

(ii) When touch externally/जब बाह्य स्पर्श करते है, d = AP + BP

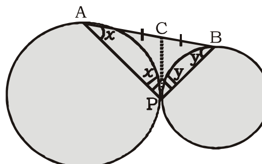
6.



A circle externally touch side BC of a ΔABC at P, AB produced at Q and AC produced at R. If QA QA = a cm then perimeter of ΔABC is = 2a

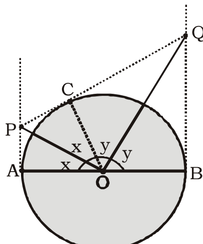
एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को बाह्य P बिन्दु पर स्पर्श करता है। AB को Q तक और AC को R तक बढ़ाया गया। यदि QA = a cm, तब ΔABC का परिमाप 2a होता है।

7.



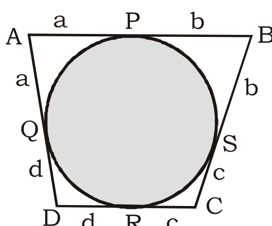
Two circles externally touch each other at P. AB is direct common tangent (DCT) of the circles. If $\angle BAP = x$ then $\angle APB$ is always right angle triangle./दो वृत्त एक दूसरे को P बिन्दु पर बाह्य स्पर्श करते हैं AB वृत्तों पर की उभयनिष्ट रेखा है यदि $\angle BAP = x$ तो कि, $\angle APB$ हमेशा एक समकोंण त्रिभुज होगा।

8.



AB is a diameter of a circle. Two tangents drawn at A & B Tangent drawn at any point C of the circle meet both tangents at P & Q. then $\angle POQ = 90°$./AB वृत्त का व्यास है A और B पर दो स्पर्श रेखाएं डाली गई और C पर डाली गई स्पर्श रेखा इन दोनों स्पर्श रेखाओं को P और Q पर मिलती है तब $\angle POQ = 90°$ होगा।

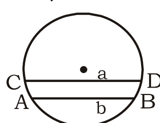
9. If a quadrilateral circumscribed a circle.(Not general case/only for some specific quadrilateral)
यदि किसी चतुर्भुज के अन्दर कोई वृत्त बनाया गया जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।



then, sum of opposite sides are equal
तब, विपरीत भुजाओं का योग समान होता है।
AB + CD = AD + BC

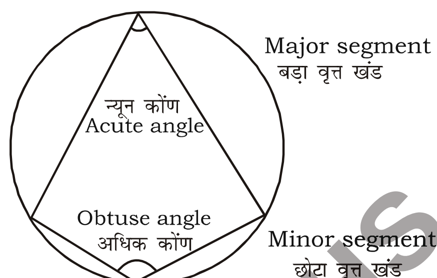
➢ ***Two circles/दो वृत्त***

1. Two circles are congruent if and only if they have equal radii./दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनकी त्रिज्याएं समान हो।
2. Of any two chords of a circle, the one which is greater is nearer to the centre./किसी वृत्त की दो असमान जीवांए में से बड़ी जीवा, छोटी जीवा की अपेक्षा केन्द्र के निकट होती है।

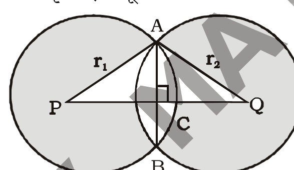


CD > AB = a > b
Here, CD > AB = a > b
यहाँ a = CD की लम्बाई, b = AB की लम्बाई

3. Angle in a major segment of a circle is acute and angle in a minor segment is obtuse.
किसी वृत्त के दीर्घ खण्ड में बना कोण न्यून कोण तथा लघुखण्ड में बना कोण अधिककोंण होता है।



4. If circles intersect each other
यदि वृत्त एक दूसरे को प्रतिछेदित करे।



AB is common chord of the circles,
जीवा AB दोनों वृत्तों में है
Distance between centres, PQ=PC+CQ
केन्द्रो के बीच की दूरी, PQ=PC+CQ

$$\Rightarrow PQ = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

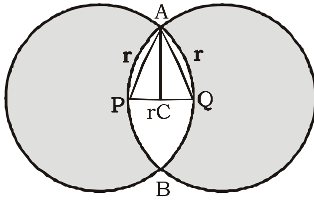
Case – 1:
If AQ is tangent of $circle_1$ or PA is tangent of $circle_2$ then ΔPAQ is a right angled triangle and $AC \perp PQ$
यदि AQ वृत्त 1 की स्पर्श रेखा और PA वृत्त 2 की स्पर्श रेखा है तो ΔPAQ एक समकोण त्रिभुज है और $AC \perp PQ$
then PA×AQ=PQ×AC
तब PA×AQ=PQ×AC

or $AC = \frac{PA \times AQ}{PQ}$

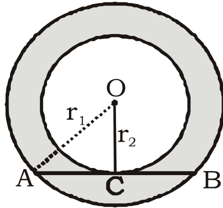
Length of common chord/उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई

$= \frac{2PA \times AQ}{PQ}$

Case – 2:
If each circles passes through the centre of the other then length of common chord is $\sqrt{3}$ r.
यदि दोनों वृत्त एक दूसरे के केन्द्र से गुजरे तो उभयनिष्ट जीवा की लंबाई $\sqrt{3}$ r होती है



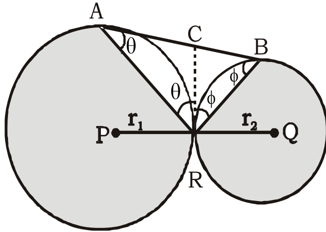
5. If circles are concentric
जब वृत्त संकेन्द्र हो तब



AB is chord of the greater circle be a tangent to smaller circle
बड़े वृत्त की जीवा AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है

Length of AB = 2AC/AB की लंबाई = 2AC = $2\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$

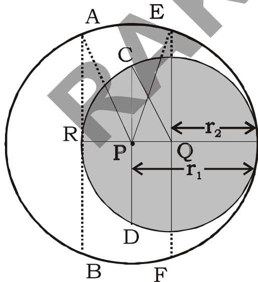
6. If circles externally touch each other
यदि वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है



- Distance between centres/केन्द्रों के बीच की दूरी = $r_1 + r_2$

R is common point of circles, AB is direct common tangent (DCT) then $\angle ARB = 90°$
R दोनों वृत्तों का उभयनिष्ठ बिन्दु है AB उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है तब, $\angle ARB = 90°$

7. If circles internally touch each other
यदि वृत्त एक दूसरे को अंत: स्पर्श करते है



P & Q are centre of greater and smaller circle respectively. then distance between centre = $r_1 - r_2$
P और Q क्रमश: बड़े वृत्त और छोटे वृत्त के केन्द्र है = $r_1 - r_2$

(a) AB - The biggest chord of the greater circle which is outside the inner circle
AB - बड़े वृत्त की सबसे बड़ी जीवा जो छोटे वृत्त से बाहर है।

AB = $2\sqrt{AP^2 - RP^2}$

जहां AP = r_1, RP = $(r_2 + r_2) - r_1 = 2r_2 - r_1$

AB = $2\sqrt{r_1^2 - (2r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{4r_2(r_1 - r_2)} = 4\sqrt{r_2(r_1 - r_2)}$

(b) CD - The smallest chord of the smaller circle which passes through the centre of greater circle./CD - छोटे वृत्त की सबसे छोटी जीवा जो बड़े वृत्त के केन्द्र से गुजरती है

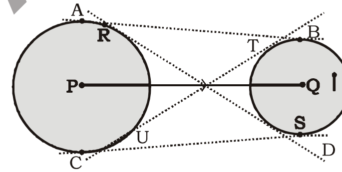
CD=$2\sqrt{CQ^2 - PQ^2} = 2\sqrt{r_2^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1(2r_2 - r_1)}$

(c) EF:- The smallest chord of greater circle which passes through the centre of smaller circle.
EF:- बड़े वृत्त की सबसे छोटी जीवा जो छोटे वृत्त के केन्द्र से गुजरती है

EF = $2\sqrt{PE^2 - PQ^2} = 2\sqrt{r_1^2 - (r_1 - r_2)^2}$

EF = $2\sqrt{r_2(2r_2 - r_1)}$

8. If circles place at some distance
यदि वृत्त एक दूसरे से कुछ दूरी पर हो



- Direct common tangent (DCT) AB and CD

$= \sqrt{(\text{Distance between centres})^2 - (r_1 - r_2)^2}$

उभयनिष्ट स्पर्श रेखा (DCT)

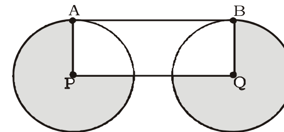
AB और CD = $\sqrt{(\text{केन्द्रो के बीच की दूरी})^2 - (r_1 - r_2)^2}$

- Transverse common tangent (TCT) RS and TU/
उभयनिष्ट तिर्यक स्पर्श रेखा (TCT) RS और TU

$= \sqrt{\left(\begin{array}{l}\text{Distance between centres} \\ \text{/केन्द्रों के बीच की दूरी}\end{array}\right)^2 - (r_1 + r_2)^2}$

***Case:* 1**

If radius of circles is same/यदि वृत्तों की त्रिज्या समान हो,
$r_1 = r_2 = r$

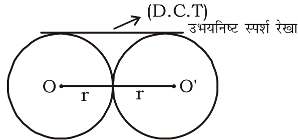


Direct common tangent/उभयनिष्ट स्पर्श रेखा, AB = $\sqrt{(PQ)^2-(r-r)}$

AB = PQ i.e. length of direct common tangent equal to distance between circle.

AB = PQ i.e. उभयनिष्ट स्पर्श रेखा की लंबाई दोनों वृत्तों के केन्द्रो के बीच की दूरी के समान होती है

Case: 2



If circle externally touch each other i.e. distance between centre = r_1+r_2/यदि वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है तो केन्द्रो के बीच की दूरी = r_1+r_2

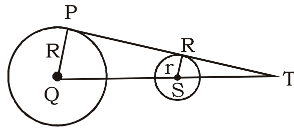
Transverse common tangent/उभयनिष्ट तिर्यक स्पर्श रेखा

= $\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}$ = 0

Direct common tangent/उभयनिष्ट स्पर्श रेखा =

$\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$ = $2\sqrt{r_1r_2}$

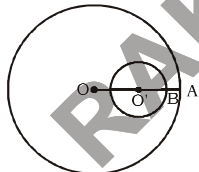
9. If direct common tangent and the line joining of centres of circle is extended and meet each other at T./उभयनिष्ट स्पर्श रेखा और वृत्त के केन्द्रो को मिलाने वाली रेखा को बढ़ाने पर दोनों T पर मिलती है।



Then, $ST=\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R-r}}\right)\mathbf{QS}$ small circle/[छोटा वृत्त]

$QT=\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R-r}}\right)\mathbf{QS}$ large circle/[बड़ा वृत्त]

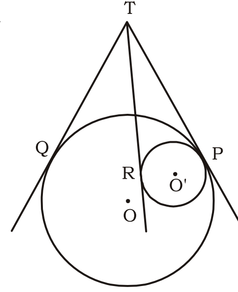
10.



Two circles with R & r cm, one circle is inscribed in another circle. If the shortest distance between the circles is S cm. Then the distance between the centres is:/दो वृत्तों की त्रिज्या R और r cm है, एक को दूसरे के अन्दर बनाया गया यदि वृत्तों के बीच की सबसे छोटी दूरी S cm है तो उनके केन्द्रो के बीच की दूरी

= OO' = OA – O'B – AB = R – r – S

11.



In the given figure, there are two circles with the centres O and O' touching each other internally at P. Tangents TQ and TP are drawn to the larger circle and tangents TP and TR are drawn to the smaller circle. Then TQ : TR = 1 : 1

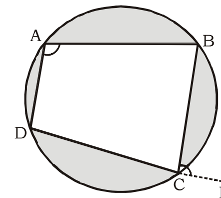
दी गई आकृति में O और O' केन्द्र वाले दो वृत्त है जो एक दूसरे को बिन्दु P पर अत: स्पर्श करता है. TQ और TP बड़े वृत्त पर डाली गई स्पर्श रेखाएं और TP तथा TR छोटे वृत्त पर डाली गई स्पर्श रेखाएं है, तो TQ : TR = 1 : 1

➢ ***Cyclic Quadrilateral/चक्रीय चतुर्भुज***

If all vertices of a quadrilateral lie on the circle, it is called a cyclic quadrilateral./यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर होते है तो यह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।

➢ ***Properties/विशेषताएं***

(i) The sum of opposite angles of a cyclic quadrilateral is 180°./चक्रीय चतुर्भुज के विपरीत कोणों का योग 180° होता है।



$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D = 180°$

(ii) The exterior angle of a cyclic quadrilateral is equal to the opposite interior angle./चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोंण अन्त: विपरीत कोण के बराबर होता है

$\angle DAB = \angle BCE$

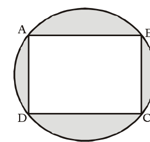
$\angle DAB + \angle BCD = 180°$

और $\angle BCD + \angle BCE = 180°$

$\therefore \angle DAB = \angle BCE$

(iii) All angles of cyclic parallelogram is 90°.

चक्रीय समानातर चतुर्भुज के सभी कोंण 90° होते है।



$\angle A + \angle C = 180°$

but according to parallelogram property $\angle A = \angle C = \theta$

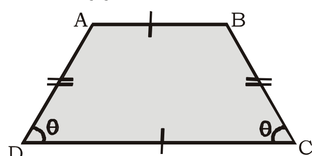
परन्तु समानातर चतुर्भुज के अनुसार $\angle A = \angle C = \theta$

$\therefore 2\theta = 180 \Rightarrow \theta = 90°$

then तब, $\angle D = \angle B = 90°$

(iv) If non parallel sides of a trapezium are equal then it will be a cyclic quadrilateral.

यदि किसी समलंब चतुर्भुज की असमानातर भुजाऐं समान हो तो यह चक्रीय चतुर्भुज होगा।



$\therefore$ AB || DC

So, अत: $\angle A = 180° - \theta$ & $\angle B = 180° - \theta$

If sum of opposite angles is 180°

विपरीत कोणो का योग = 180°

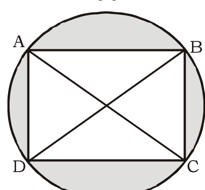
($\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$)

then it is cyclic quadrilateral.

यह एक चक्रीय चतुर्भुज है

(v) Ptolemy's theorem: In a cyclic quadrilateral the sum of products of the measures of the pairs of opposite sides is equal to its diagonals.

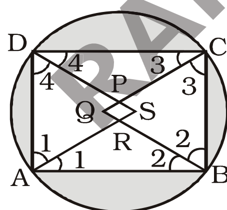
पटोलमी प्रमेय: किसी चतुर्भुज चक्रीय में, विपरीत भुजाओं के गुणनफलों का योग चतुर्भुज के विकर्ण के समान होता है।



AC + BD = AB. DC + AD. BC

(VI) The quadrilateral formed by angle bisectors of a cyclic quadrilateral is also cyclic.

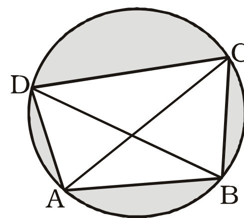
किसी चक्रीय चतुर्भुज के कोण समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।



i.e. If ABCD is a cyclic quadrilateral, then □ PQRS is also a cyclic.

अर्थात् यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। तो □ PQRS भी चक्रीय होगा।

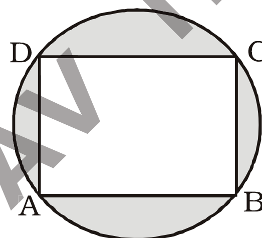
(VII) If A cyclic trapezium is isosceles and its diagonals are equal/एक चक्रीय समलम्ब चतुर्भुज समद्विबाहु होता है तथा इसके विकर्ण समान होता है।



i.e. If ABCD is a cyclic trapezium s.t. AB||DC, then AD = BC and AC = BD.

अर्थात् यदि ABCD एक चक्रीय समलम्ब चतुर्भुज इस प्रकार है कि, AB||DC, तब AD = BC और AC = BD.

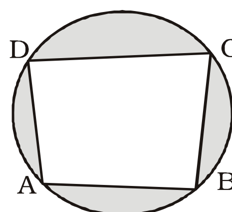
(VIII) If two opposite sides of a cyclic quadrilateral are equal, then the other two sides are parallel./यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की दो विपरीत भुजाएं बराबर हो, तो अन्य दो भुजाएं समानांतर होती है।



i.e. If AD = BC, then AB || CD./यदि AD = BC, तब AB || CD.

(IX) An isosceles trapezium is always cyclic.

एक समद्विबाहु चतुर्भुज हमेशा चक्रीय होता है।



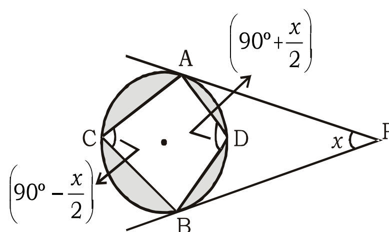
i.e. If AB || DC and AD = BC.

यदि AB || DC और AD = BC.

Then, ABCD is a cyclic trapezium.

तो, ABCD चक्रीय समलम्ब चतुर्भुज है।

(X)

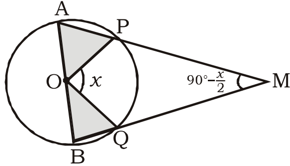


(XI) If AB is a diameter of the circle (centre O) and APM & BQM are its two secants. If $\angle$POQ = x then

$\angle \text{PMQ} = 90° - \frac{x}{2}$

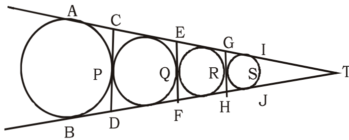
यदि O केंन्द्र वाले वृत्त का व्यास AB है तथा दो छेदक रेखाएं APM व BQM जो वृत्त से बाहर M पर काटती है तो $\angle$POQ = x तब

$\angle \text{PMQ} = 90° - \frac{x}{2}$



Some Important results/कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम

1.



In the adjoining figure AT and BT are the two tangents at A and B respectively CD is also a tangent at P.

There are some more circles touching each other and the tangents AT and BT also. Which one of the following is true?

दी गई आकृति में AT और BT क्रमश: A और B पर दो स्पर्श रेखाएं है CD बिन्दु P पर स्पर्श रेखा है.

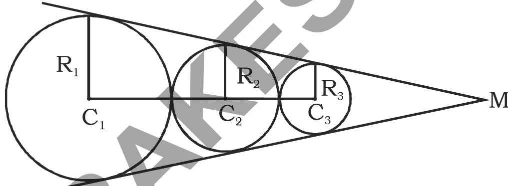
कुछ ओर वृत्त है जो एक दूसरे को स्पर्श करते है और स्पर्श रेखाओं AT और BT को भी स्पर्श करता है, तो निम्न कथन सत्य होगें।

(i) PC + CT = PD + DT

(ii) AE + ET = BF + FT

(iii) FH + HT = EG + GT

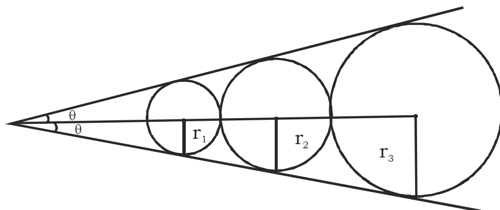
2.



R_1, R_2, R_3 are always in GP

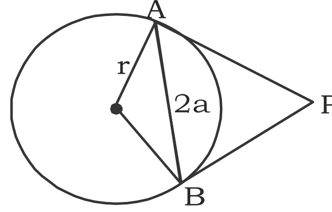
$R_2 = \sqrt{\mathbf{R_1 \times R_3}}$

3.



$\frac{\mathbf{r_2}}{\mathbf{r_1}} = \frac{\mathbf{r_3}}{\mathbf{r_2}} = \frac{\mathbf{1+\sin\theta}}{\mathbf{1-\sin\theta}}$

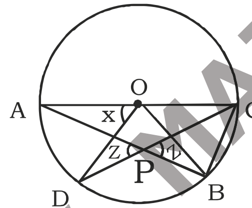
4.



If AB = 2a, Radius = r

then length tangent PA = PB = $\frac{\mathbf{ar}}{\sqrt{\mathbf{r^2 - a^2}}}$

5.



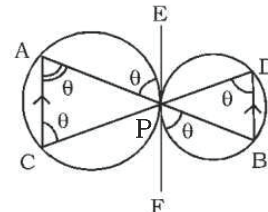
If O is centre of circle $\angle$AOD = x, $\angle$BOC = y AB and CD are chord.

then, $\angle$APD = $\angle$CPD = Z = $\frac{\angle \text{AOD} + \angle \text{BOC}}{2}$

$Z = \frac{x+y}{2}$

$\angle$**APC = 180– Z = 180 –** $\left(\frac{\mathbf{x+y}}{\mathbf{2}}\right)$

6.



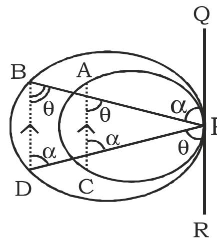
If AB = CD and

AC||EF||DB, EF is direct common tangent

$\boxed{\angle \text{ACP} = \angle \text{APE}}$ using alternate segment theorem

$\boxed{\frac{\textbf{PA}}{\textbf{PB}} = \frac{\textbf{PC}}{\textbf{PD}}}$

7.



AC& BD are parallel

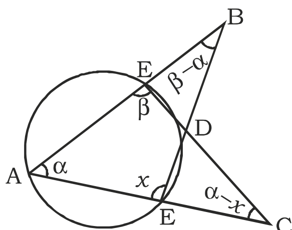
$\angle DPR = \angle CPR = \theta = \angle PAC = \angle PBD$

$\angle BPQ = \angle APQ = \alpha = \angle PCA = \angle PDB$

then, $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$

$PA \times PD = PC \times PB$

8.



If AB and AC are secant lines and

$\angle BAC = \alpha$

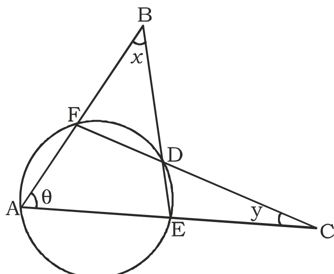
$\angle AFC = \beta$

$\angle BEA = x$

then, $\angle ABE = |\beta - \alpha|$

$\angle ACF = |x - \alpha|$

9.



AB & AC are secant

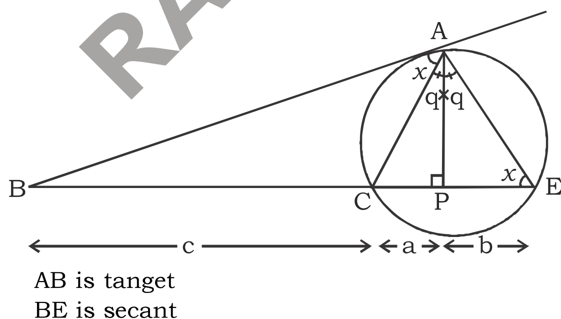
If $\angle ABE = x$

$\angle ACF = y$

$\therefore$ $\angle BAC = \theta$

then $\boxed{\theta = 90 - \left(\frac{x+y}{2}\right)}$

10.



AB is tanget

BE is secant

AP is Angle biseder of $\angle CAE$

In this figure

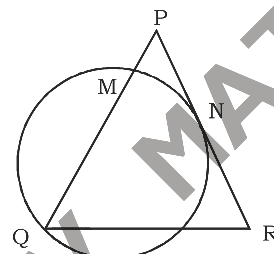
AB = BP

$\boxed{c = \frac{a^2}{b.c}}$

$\boxed{AB = BP = \frac{a \times b}{b - c}}$

11. PQR is an isosceles triangle with PQ = PR A circle through Q toucheng PR at the middle point and intersect PQ at M then PM : PQ

PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है। जिसमें PQ = PR है। एक वृत्त जो Q से होकर गुजरता है। और PR को मध्य बिन्दु पर स्पर्श करता है। तथा PQ को M पर प्रतिच्छेद करता है। तो PM : PQ

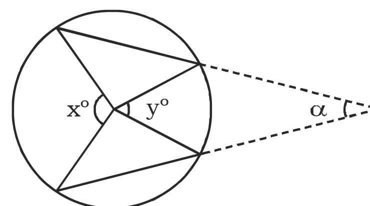


$PN^2 = PQ \times PM$

$PM = \frac{1}{2}$

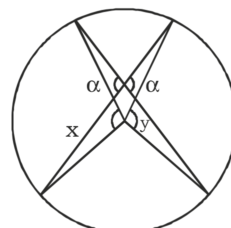
$\frac{PM}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

12. Intersecting chords (external point)



$\alpha = \frac{\mathbf{x-y}}{\mathbf{2}}$

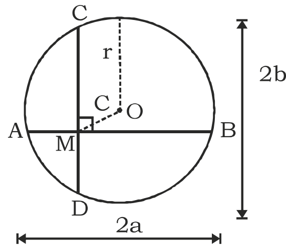
13. Intersecting chords (external point)



Angle subtended by minor chord is x° and by major is y°.

$\alpha = \frac{\mathbf{x+y}}{\mathbf{2}}$

14.



If CD ⊥ AB

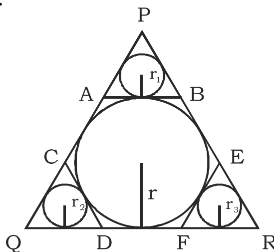
AB = 2a

CD = 2b

OM = C and Radius = r then

$$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$$

15.



PQR is a triangle with inradius r.

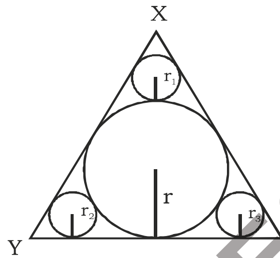
AB, CD, EF are 3 tangents to the circle of PQR the inradii of PAB,

QCD, REF are

r_1, r_2, r_3

then, $r = r_1 + r_2 + r_3$

16.

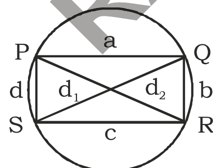


PQR is a triangle with inradius r

The radius of cirle drawn as shown in the figure are r_1, r_2, r_3

$r = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1}$

17. In a cyclic quadrilateral

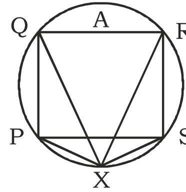


PR × QS = (PQ × SR) + (PS × QR)

or

$d_1 \times d_2 = (a \times c) + (b \times d)$

18.

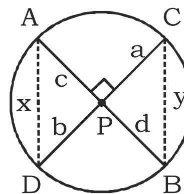


ABCD is a squane (cyclic) of side "A"

X is a point on the circle, then

$\mathbf{PX^2 + QX^2 + RX^2 + SX^2 = 4A^2}$

19.



If CD ⊥ AB

AD = y, CB = x

OC = a, OD = b

OA = c, OB = d and radius = R

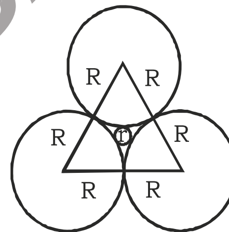
then;

$x^2 + y^2 = 4R^2$

or

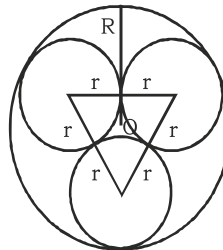
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$

20.

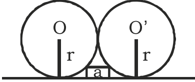


3 circles are of radius R touching each other. A small circle is also present touching the circles. The radius (r) of the smallest circle/ 3 समान त्रिज्या (R) वाले वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तथा एक छोटा वृत्त (r त्रिज्या) इन तीनों वृत्तों को स्पर्श करता है। तो छोटे वृत्त की त्रिज्या $\mathbf{(r) = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)}$

21.



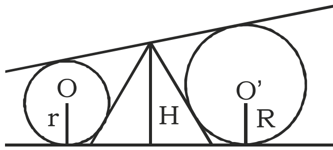
3 circles are of radius r touching each other. A large circle is also present touching the circles. The radius of the largest circle/3 समान त्रिज्या (r) वाले वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तथा एक बड़ा वृत्त (R त्रिज्या) इन तीनों वृत्तों को स्पर्श करता है। तो बड़े वृत्त की त्रिज्या **(R) = r** $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)$

22. 

Two circles are of equal radius (r) and touching each other externally, and a square having side x is also touching the circles.
समान त्रिज्या (r) के दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तथा एक वर्ग जिसकी भुजा x हैं दोनों वृत्तों को स्पर्श करता है।

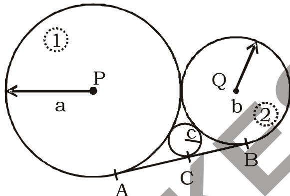
then side of square/तो वर्ग की भुजा बराबर **(x) =** $\frac{2}{5}r$

23.



Two circles of radius r and R, a triangle with height H in between, then
r + R = H
त्रिज्या r और R वाले दो वृत्तों के बीच में H ऊँचाई का एक त्रिभुज हो तब r + R = H

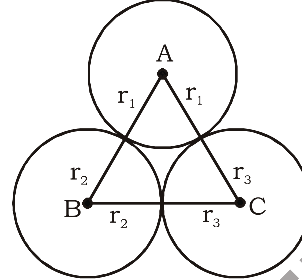
24



Two circles of radius a cm. & b cm. externally touch each other. AB is DCT of circles. A third circle with radius C cm. externally two circles and DCT. Then relation between a, b & c is:
a cm और b cm त्रिज्या वाले दो वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है। C त्रिज्या वाला तीसरा वृत्त दोनों वृत्तों और इनकी उभयनिष्ट स्पर्श रेखा को बाह्य स्पर्श करता है तब a, b और c के बीच संबंध है:
According formula of Case 2
Case 2 के सूत्र के अनुसार
AB = $2\sqrt{ab}$
AC = $2\sqrt{ac}$ [यह (1) और (3) वृत्त की उभयनिष्ट स्पर्श रेखा है]
CB = $2\sqrt{bc}$ [यह (2) और (3) वृत्त की उभयनिष्ट स्पर्श रेखा है]]
AB = AC + CB

$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$

25.

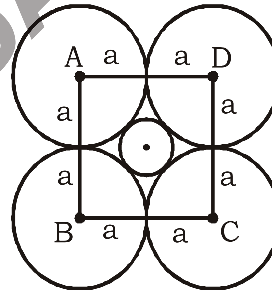


With A, B, C centres, three circles are drawn such that they touch each other externally.
The sides of $\triangle ABC$ are x cm, y cm, z cm then sum of the radius of the circles =

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{x+y+z}{2}$$

A, B और C केन्द्रो वाले तीन वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है यदि $\triangle ABC$ की भुजाऐं x cm, y cm z cm, हो तीनों वृत्तों की त्रिज्याओं का योग = $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{x+y+z}{2}$

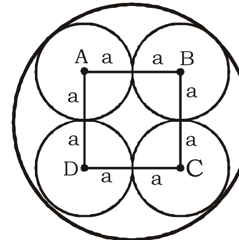
26.



In the given figure, radius of smaller circle is/दी गई आकृति में, छोटे वृत्त की त्रिज्या:

$$=\frac{1}{2}\times\left[2a\left(\sqrt{2}-1\right)\right] = \left(\sqrt{2}-1\right)a$$

27.

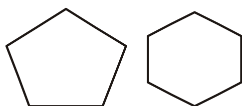


In the given figure, find the radius of bigger circle is
दी गई आकृति में, बड़े वृत्त की त्रिज्या

$$= \sqrt{2}a + a = \left(\sqrt{2}+1\right)a$$

POLYGON
बहुभुज

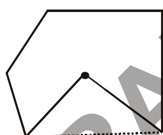
A closed-figure bounded by three or more than three straight lines./तीन या तीन से अधिक सीधी रेखा से घिरी एक बंद आकृति बहुभुज कहलाती है।

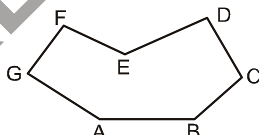


e.g.	No. of sides	Name
	3	Triangle
	4	Quadrilateral
	5	Pentagon
	6	Hexagon
	7	Heptagon
	8	Octagon
	9	Nonagon
	10	Decagon

➢ **Types of polygon on the basis of angle**
कोण के आधार पर बहुभुज के प्रकार

- *Convex Polygon/ उत्तल बहुभुज:-* A polygon in which none of its interior angle is more than 180° and all line inside the figure, is known as a 'convex polygon'./वह बहुभुज जिसमें कोई भी अंत:कोण 180 डिग्री से अधिक न हो तथा सभी रेखा आकृति के अंदर हो वह 'उत्तल बहुभुज' के रूप में जाना जाता है।
- *Concave Polygon/ अवतल बहुभुज:-*A polygon in which atleast one interior angle is more than 180° and at least one diagonal lies outside the figure , then it is said to be 'concave'./वह बहुभुज जिसमें कम से कम एक अंत: कोण 180 डिग्री से अधिक हो तथा कम से कम एक विकर्ण आकृति के बहार हो तो यह 'अवतल बहुभुज' कहा जाता है।





➢ **Some important types of polygon on the basis of sides/भुजाओं के आधार पर कुछ महत्वपूर्ण प्रकार के बहुभुज**

- *Regular Polygon/ नियमित बहुभुज:-* A polygon in which all the sides are equal and also the interior angles are equal, is called a 'Regular polygon'./वह बहुभुज जिसमें सभी भुजाएँ समान होती है तथा अंत: कोण भी समान होते है उसे नियमित बहुभुज कहा जाता है।

  If n = total no. of sides of a regular polygon, then:-
  यदि n = नियमित बहुभुज की भुजाओं की कुल संख्या, तो–

Sum of interior angles/अंत कोणों का योग = $(n-2)\times 180°$
= $(n-2)\times 180°$

Each exterior angle/प्रत्येक बाह्यकोण $= \left(\frac{360°}{n}\right)$

Sum of all exterior angle/सभी बाह्यकोण का योग = 360°

Each interior angle = 180°- exterior angle
प्रत्येक अंत: कोण = 180°- बाह्यकोण

Number of diagonals/विकर्ण की संख्या $= \frac{n(n-3)}{2}$

Perimeter = n×a/ परिधि = n×a

where a = length of side/यहाँ a = भुजाओं की लम्बाई

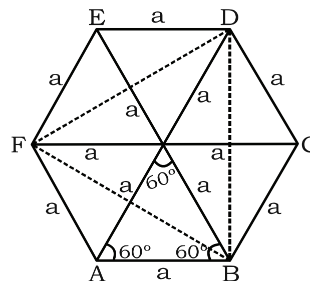
Area of regular polygon/नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{na^2}{4}\times \cot\left(\frac{180}{n}\right)^0$

Internal angle + External angle/अंत:कोण + बाह्यकोण = 180°

Each exterior angle of a regular polygon/एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण = $\frac{360°}{n}$

➢ **Regular Hexagon (नियमित षट्भुज)**



Each Interior angle/प्रत्येक आंतरिक कोण = 60°

Each exterior angle/प्रत्येक बाहरी कोण = 120°

Total diagonals/कुल विकर्ण = 9

Large diagonal/(बड़ा विकर्ण) = FC = AD = BE = 2a

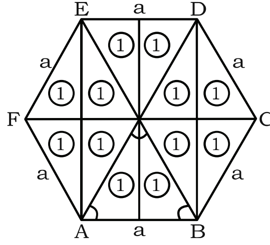
Perimeter/परिमाप = 6a

Regular Hexagon = 6 equilateral Δ = 3 Rhombus
नियमित षट्भुज = 6 समबाहु Δ = 3 समचतुर्भुज

Area = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ a² × 6 = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ a²

r = short diagonal (लघु विकर्ण) = FD = DB = BF = $\sqrt{3}$ a

Circumradius/परिधि (R) = a (side)

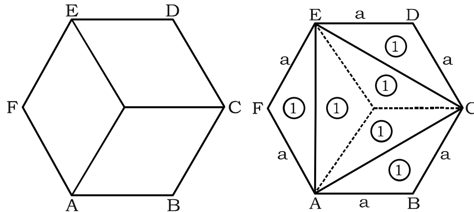


12 equilateral Δ formed. (12 समबाहु Δ का गठन हुआ।)

Area of each Δ is same. (प्रत्येक Δ का क्षेत्रफल समान हैं।)

3 Rhombus of equal area in a regular hexagon.

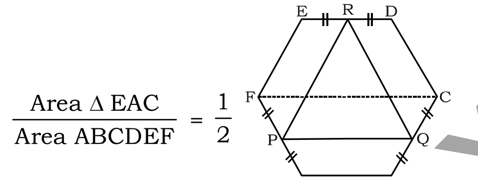
एक नियमित षट्भुज में समान क्षेत्रफल के 3 समचतुर्भुज।



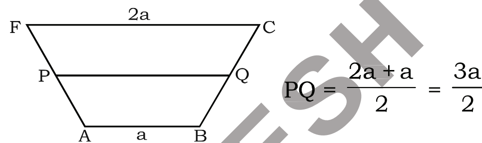
Δ EAC = equilateral Δ of side $\sqrt{3}$ a

Δ EAC = $\sqrt{3}$ a भुजा का समबाहु Δ

$$\frac{\text{Area } \Delta \text{ EAC}}{\text{Area ABCDEF}} = \frac{1}{2}$$



P, Q, R are mid points (P, Q, R मध्य बिंदु हैं)



$$PQ = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}$$

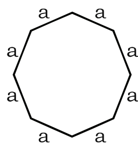
Δ PQR = equilateral Δ with side $\frac{3a}{2}$

$$\therefore \frac{\text{Area } \Delta \text{ PQR}}{\text{Area ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{9}{4} a^2}{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{3}{8}$$

- **Octagon (अष्टभुज)**

Regular figure with 8 sides/8 भुजाओं वाली नियमित आकृति

Let side of octagon/मान लीजिए अष्टभुज की भुजा = a



Area/क्षेत्र = $2\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$

Perimeter/परिमाप = 8a

Inradius (r)/त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{2}-2}$

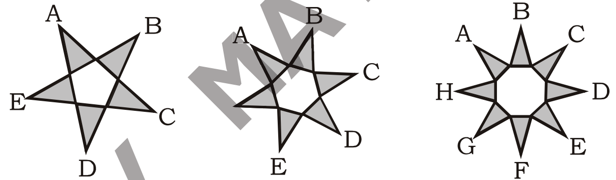
Circumradius (R)/परिधि (R) = $\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}a$

Each interior angle/प्रत्येक आंतरिक कोण = 135°

Each exterior angle/प्रत्येक बाहरी कोण = 45°

Number of diaonal/विकर्ण की संख्या = 20

- **Star/तारा:**-Sum of outer angles of a star Star forms by extending sides of a regular polygon./तारा के बाहरी कोणों का योग नियमित बहुभुज की भुजाओं के विस्तार द्वारा तारा का गठन होता है।



Let outer triangles are 'n' then sum of outer angles = n × 180 – two times sum of exterior angles = (n × 180 – 2 × 360) = 180 (n – 4)/माना बाहरी त्रिभुज 'n' है, तो बाहरी कोण का योग = n × 180 – बाह्यकोण के दो गुना का योग = (n × 180 – 2 × 360) = 180 (n – 4)

If n=5 then $\angle$A+$\angle$B+.....+$\angle$E=180 (5–4) = 180°

If n=6 then $\angle$A+$\angle$B+.....+$\angle$F=180 (6–4) = 360°

If n = 8 then $\angle$A+$\angle$B+.....+$\angle$H =180 (8 – 4) = 720°

- **Some important points about Polygon.**
बहुभुज के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बिंदु।

A convex polygon in which there is maximum number of sides, it has the greater enclosed area when the perimeter of the polygon is constant.

उत्तल बहुभुज में जब बहुभुज की परिमाप स्थिर होती है तो इसका संलग्न क्षेत्र सबसे ज्यादा होता है तथा भुजाओं की संख्या अधिकतम होती है।

Note: Which of the following figures will have maximum area if the perimeter of all figures is same/निम्नलिखित में से कौन-सी आकृति का क्षेत्रफल अधिकतम होगा, यदि सभी आकृतियों का परिमाप समान है।

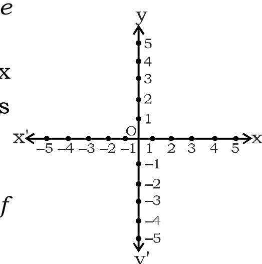
Circle > Octagon> Hexagon> Square> Rhombus/ वृत्त > अष्टभुज > षट्भुज > वर्ग >समचतुर्भज

Circle is a polygon with infinite sides of minimum possible length./वृत्त न्यूनतम संभव लंबाई की अनंत भुजाओं वाला बहुभुज है।

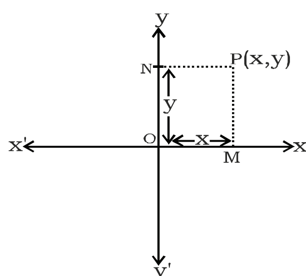
CO-ORDINATE GEOMETRY
निर्देशांक ज्यामिति

CHAPTER
31

- *Rectangular Co-ordinate Axes:*
  line xox' = x axis or axis of x
  line yoy' = y axis or axis of y
  O = origin (0,0)



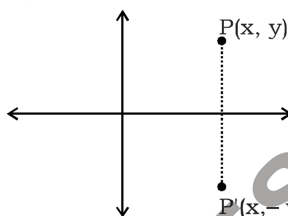
- *Cartesian co-ordinates of A point :*



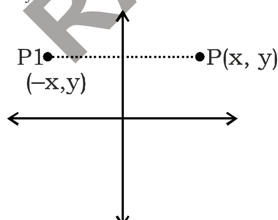
- OM is called x co-ordinate or abscissa of point P
- ON is called y co-ordinate or ordinate of point P

P = (x , y)
↓ ↓
abscissa ordinate

- *Reflection/ प्रतिबिंब:* Reflection in the line y = 0 i.e in the x axis:
  - The line y = 0 means the x axis
    M_x (x, y) = (x, – y)

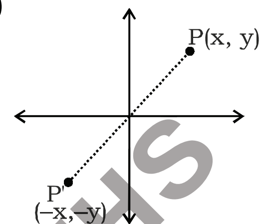


  - When a point is reflected in the x-axis the sign of its ordinate changes.
- *Reflection in the line x = 0 i.e. in the y-axis:*
  - The line x = 0 means the y-axis
    M_y (x, y) = (–x,y)]



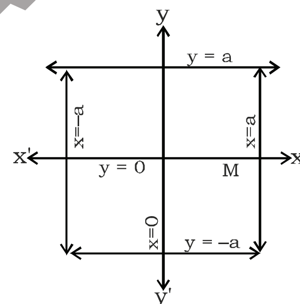
  - When point is reflected in the line y-axis the sign of its abscissa changes

- *Reflection in the origin:*
  M_o (x, y) = (–x, –y)

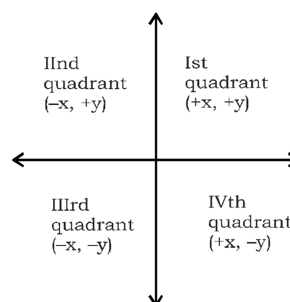


when a point p (x, y) is reflected in the origin, the signs of its abscissa and ordinate both change.

- Equation of x axis/x अक्ष का समीकरण ⇒ y = 0
- Equation of line parallel to x axis ⇒ y = ± a
  x अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ⇒ y = ± a
- Equation of y axis/y अक्ष का समीकरण ⇒ x = 0
- Equation of line parallel to y axis ⇒ x = ± a
  y अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ⇒ x = ± a



- *Quadrants:*



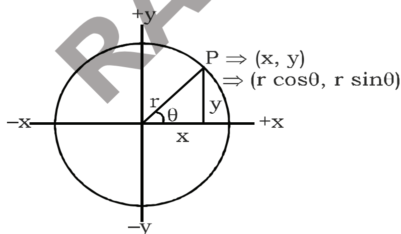
- Ist quadrat/प्रथम चतुर्थांश : x > 0, y > 0
- 2nd quadrat/दूसरा चतुर्थांश : x < 0, y > 0
- IIIrd quadrat/तीसरा चतुर्थांश : x < 0, Y < 0
- IVth quadrat/चतुर्थ चतुर्थांश: x > 0, y < 0

SOME IMPORTANT POINT
कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

- The abscissa of a point is its perpendiculor distance from y-axis./किसी बिंदु का भुज उसकी y-अक्ष से लंबवत् दूरी होती है।
- The ordinate of a point is its perpendiculor distance from x-axis./किसी बिंदु का कोटि उसकी x-अक्ष से लम्बवत् दूरी होती है।
- The abscissa of every point situated on the right side of y-axis is positive and the abscissa of every point situated on the left side of y – axis is negative/y-अक्ष के दाईं ओर स्थित प्रत्येक बिंदु का भुज धनात्मक होता है और y-अक्ष के बाईं ओर स्थित प्रत्येक बिंदु का भुज ऋणात्मक होता है
- The ordinate of every point situated above x-axis is positive and that of every point below x-axis is negative/x-अक्ष के ऊपर स्थित प्रत्येक बिंदु की कोटि धनात्मक होती है और x-अक्ष के नीचे स्थित प्रत्येक बिंदु की कोटि ऋणात्मक होती है
- The abscissa of every point on y – axis is zero/ y-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का भुज शून्य होता है
- The ordinate of every point on x – axis is zero/ x – अक्ष पर प्रत्येक बिंदु की कोटि शून्य होती है
- Co-ordinate of the origin are O = (0,0)/मूल बिंदु के निर्देशांक O = (0,0) हैं।

➢ ***Pole:-*** Reference point in polar Co-ordinate system the Co-ordinate is called pole.
ध्रुवीय समन्वय प्रणाली में ध्रुव संदर्भ बिंदु निर्देशांक को ध्रुव कहा जाता है।

➢ ***Polor Co-ordinate of a point* (एक बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक):** When each point on a plane of a 2D co-ordinate system is decided by a distance from a reference point and an angle is taken from a reference direction. It is known as the polar co-ordinate system.
जब एक 2D समन्वय प्रणाली के तल पर प्रत्येक बिंदु को एक संदर्भ बिंदु से दूरी तय किया जाता है और एक संदर्भ दिशा से एक कोणा लिया जाता है। इसे ध्रुवीय समन्वय प्रणाली के रूप में जाना जाता है।



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

➢ *Distance formula*/दूरी सूत्र ⇒ Distance between two points in the plane is the length of the line segment joining them
दो बिन्दुओं के बीच की दूरी उस रेखाखण्ड की लम्बाई है जो एक समतल में दो बिंदुओं को जोड़ती है।

P (x_1, y_1) —— Q (x_2, y_2)

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

➢ *Distance formula in polar form*/दूरी सूत्र ध्रुवीय रूप में

P (r_1, θ_1) —— Q (r_2, θ_2)

$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$

Some Useful points based on distance formulas
दूरी सूत्र पर आधारित कुछ उपयोगी बिंदु

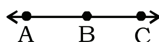
1. *In order to prove that a given figure is a*/यह सिद्ध) करने के लिए कि दी गई आकृति है-

- Square, prove that the four sides are equal and the diagonal are also equal./वर्ग, सिद्ध कीजिए कि चारों भुजाएँ बराबर हैं और विकर्ण भी बराबर हैं।
- Rhombus, prove that the four sides are equal./समचतुर्भुज, सिद्ध कीजिए कि चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।
- Rectangle, Prove that opposite sides are equal and the diagonals are equal./आयत, सिद्ध कीजिए कि सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं और विकर्ण बराबर होते हैं।
- Parallelogram, prove that the opposite side are equal./समांतर चतुर्भुज सिद्ध कीजिए कि सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
- Parallelogram but not a rectangle, prove that its opposite sides are equal but the diagonals are not equal./समांतर चतुर्भुज परन्तु आयत नहीं, सिद्ध कीजिए कि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं परन्तु विकर्ण बराबर नहीं हैं।
- Rhombus but not a square, prove that its all sides are equal, but the diagonals are not equal./समचतुर्भुज लेकिन वर्ग नहीं, सिद्ध कीजिए कि इसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं, लेकिन विकर्ण बराबर नहीं हैं।

II. *For three points to be co-linear, prove that the sum of the distances between two pairs of points is equal to third pair of point.*/तीन बिन्दुओं के सहरेखीय होने के लिए सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं के दो युग्मों के बीच की दूरियों का योग, बिन्दुओं के तीसरे युग्म के बराबर है।

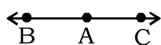
Three pints A, B, C are co-linear If and only if:/तीन बिंदु A, B, C संरेख हैं यदि और केवल यदि:

- AB + BC = AC i.e.



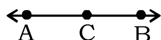
or

- AB + AC = BC i.e.



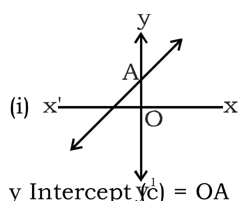
or

- AC + BC = AB i.e.

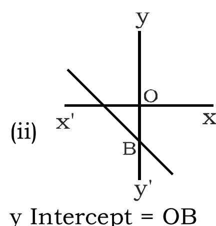


➢ *Y– Intercept/y-अतंखण्ड–*

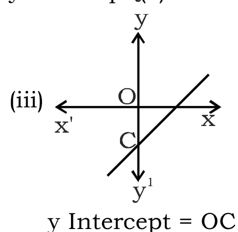
If a straight line meets y-axis at a point, the distance of this point from the origin is called y-intercept and is usually denoted by a,b./यदि एक सीधी रेखा एक बिंदु पर y-अक्ष से मिलती है, तो मूल बिंदु से इस बिंदु की दूरी को y-अतंखण्ड कहा जाता है और इसे आमतौर पर a,b. द्वारा निरूपित किया जाता है।

(i) 

y Intercept (c) = OA

(ii) 

y Intercept = OB

(iii) 

y Intercept = OC

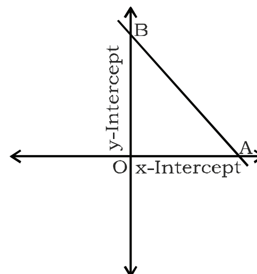
Some Important point

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

1. For x-axis y intercept/x-अक्ष के लिए y अतंखण्ड = 0
2. For every line parallel to y-axis, y intercept/y-अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए, y अतंखण्ड = 0
3. y inercept = is/y अतंखण्ड है
   i. Positive, If measurd above the origin (fig..I)/धनात्मक, अगर मूल बिन्दु के ऊपर मापा जाता है (fig..I)
   ii. Negative, If meaured below the arigin (fig. (ii), (iii))/ ऋणात्मक, यदि मूल बिन्दु के नीचे मापा जाता है (fig. (ii), (iii))

➢ **x - Intercept/x - अतंखण्ड**

If a line meets the x-axis at point A, then the distance of point A from the origin O (i.e = OA) is called x -intercept./यदि एक रेखा बिंदु A पर x-अक्ष को काटती है, तो मूल बिंदु O से बिंदु A की दूरी (अर्थात = OA) को x -अतंखण्ड कहा जाता है।



Some Important point

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

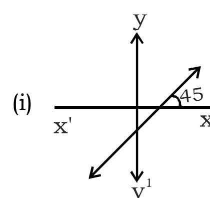
1. For y axis, x intercept = 0/y अक्ष के लिए, x अतंखण्ड = 0
2. For every line parrallel to x axis; x -intercept = 0/ x-अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए; x- अतंखण्ड = 0
3. (i) Positive, If measured above the origin/धनात्मक, अगर मूल बिंदु के ऊपर मापा जाता है

   (ii) Negative If measured below the origin./ऋणात्मक अगर मूल बिंदु के नीचे मापा जाता है।

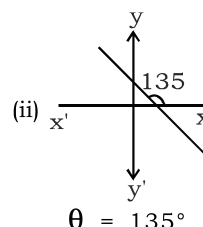
➢ *Inclination and Slope/झुकाव और ढलान*

The angle which a straight line makes with the positive direction of x-axis (measured in the anti clockwise direction) is called inclination of the line./एक सीधी रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा (वामावर्त दिशा में मापी गई) के साथ जो कोण बनाती है, उसे रेखा का झुकाव कहा जाता है।

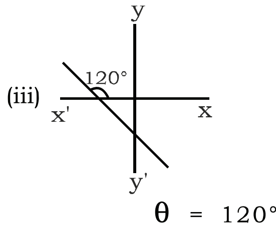
- The inclination of line is usually denoted by θ (theta) रेखा के झुकाव को आमतौर पर θ (थीटा) द्वारा निरूपित किया जाता है

(i) 

Inclination, $\theta = 45°$

(ii) 

$\theta = 135°$



$\theta = 120°$

Important points/ महत्वपूर्ण बिंदु

- For x - axis and every line parallel to x - axis, the inclination is zero i.e. $\theta = 0°$/x -अक्ष और x -अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए, झुकाव शून्य है अर्थात i.e. $\theta = 0°$
- For y-axis and every line parallel to y-axis, the inclination is 90° i.e. $\theta = 90$/y- अक्ष और y-अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए, झुकाव 90° है अर्थात i.e. $\theta = 90$

➤ *Slope/ ढलान* : If θ is the inclination of a line, the slope of the line is $\tan\theta$ and is usally denoted by letter 'm'/यदि θ रेखा का झुकाव है, तो रेखा का ढलान $\tan\theta$ है और इसे आमतौर पर अक्षर m द्वारा निरूपित किया जाता है

$\therefore$ Slope= $m = \tan\theta$

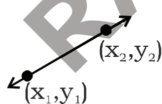
Important points/ महत्वपूर्ण बिंदु

- for x - axis amd every line parallel to x-axis, the inclination $\theta = 0$/x -अक्ष और x -अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए, झुकाव $\theta = 0$

  $\therefore$ slope (m) = $\tan\theta = \tan 0° = 0$.
- for y -axis and every line parallel to y-axis the inclination $\theta = 90$/y-अक्ष और y-अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए झुकाव $\theta = 90$ है

$\therefore$ Slope (m) = $\tan\theta$ = infinity (not defined)/अनंत (परिभाषित नहीं)

➤ *Slope of a line in terms of co-ordinate of any two points on it.*/रेखा पर किन्हीं दो बिंदुओं के निर्देशांक के संदर्भ में रेखा का ढाल।

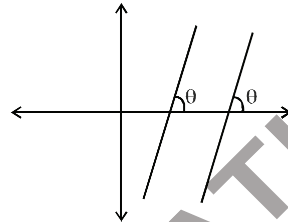


Slope = $\tan\theta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

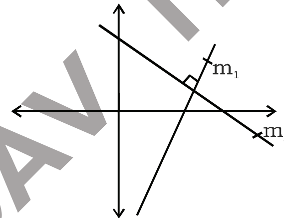
➤ *Angle between two line*/दो रेखाओं के बीच का कोण: The angle θ between the lines having slopes m_1 and m_2 is given by /ढलान m_1 और m_2 वाली रेखाओं के बीच कोण θ द्वारा दिया गया है $\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

➤ *Condition of parallelism of lines* /रेखाओं के समानान्तर होने की स्थिति: If two line are parallel to each other thier slope will be equal / यदि दो रेखाएँ एक दूसरे के समान्तर हों तो उनकी प्रवणता बराबर होगी

$m_1 = m_2$



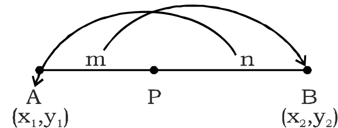
➤ *Condition of perpendicularity of two lines*/यदि दो रेखाऐ एक दुसरे के लंबवत हो



$m_1 m_2 = -1$

➤ *Section Formula*/प्रतिच्छेदन बिन्दु का सूत्र

(A) Internal divison (अंतः विभाजन)



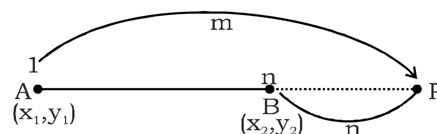
$$P = \left(\frac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \frac{m y_2 + n y_1}{m+n}\right)$$

➤ *The co-ordinates of the mid-point of the line segment Joining the points*/बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

$(x_1\ y_1)$ and $(x_2\ y_2)$ i.e. m : n = 1 : 1

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

➤ *External divison* (ब्राह्य विभाजन)

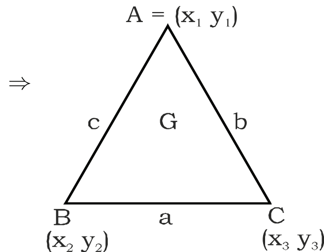


$$P = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

Some Applications of section formula

विभाजन सूत्र के कुछ अनुप्रयोग

⇒



G ⇒ Centroid/केन्द्रक = $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

I ⇒ Incenter/अंत: केन्द्रक =

$$\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$$

➢ *Co-ordinates of its circum center/*परिकेन्द्र के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}\right)$$

➢ *Co-ordinaties of its orthocentre/*लम्बकेन्द्र के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}\right)$$

Different forms of the equation of A straight line.

एक सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप

i. **General equation of a straight line is/सरल रेखा का सामान्य समीकरण है-**

⇒ Ax + By + C = 0

Where A, B, and C are constant./जहां A, B, और C स्थिर हैं।

If equation of two line is $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Both the line are

(i) Coincident/संपाती, If $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(ii) Parallal/समानांतर, if $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(iii) Intersecting/प्रतिच्छेदक If $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(iv) Perpendicular/लम्बवत If $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

➢ *Angle b/w two straght line when their equation are given/*दो सीधी रेखाओं के बीच का कोण जब उनके समीकरण दिए गए हों

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\right|$$

➢ *Point of Intersection of two lines/*दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0 = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

➢ *Slope Intercept from of A line/*एक रेखा का ढलान अतंखण्ड रूप : The equation of a line with slope m and making an interecpt c on y-axis is/ढलान m वाली रेखा और y-अक्ष पर एक अतंखण्ड c बनाने का समीकरण है $\boxed{y = mx + c}$

Note:

1. If line passes through the origin then /यदि रेखा मूल बिंदु से गुजरती है तो

$$0 = m \times 0 + c \Rightarrow c = 0.$$

therefor equation of a line passing through the origin is $\boxed{y = mx}$ where m is slope of line/इसलिए मूल बिंदु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\boxed{y = mx}$ है जहाँ m रेखा का ढलान है

2. If the line is parallel to x-axis, then m = 0, therefor the equation of line parallel to x-axis is y = c/यदि रेखा x-अक्ष के समानांतर है, तो m = 0, इसलिए x-अक्ष के समानांतर रेखा का समीकरण y = c है।

➢ *Point- slope form of A line/* रेखा का बिन्दु ढाल रूप

⇒The eq^n of a line which passes through the point (x_1, y_1) and has the slope 'm' is/एक रेखा का समीकरण जो बिंदु (x_1, y_1) से होकर गुजरती है और जिसका ढाल 'm' है

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

*Two – point form of A line/***रेखा का द्वि-बिंदु रूप**

The eq^n of a line passing through two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is ⇒/दो बिंदुओं (x_1, y_1)और (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है,

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

- **Intercept form of A line/रेखा का अन्तखण्ड रूप:**
The eq^n of a line which cuts off intercepts a and b respctively from the x and y axes is $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$ /उस रेखा का समीकरण जो x और y अक्षों से क्रमश: a और b को काटती है

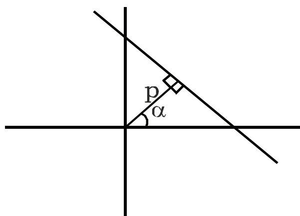
- *Normal form or perpendicular form of A line./A रेखा का सामान्य रूप या लंबवत रूप।*
The equation of the straight line which the length of the perpendiculor from the origin is p and this perpendiculor makes an angle α with x-axis is $\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$

- *DISTANCE FORM OF A LINE/रेखा का दूरी रूप:*
The eq^n of straight line passing through (x_1, y_1) and making an angle (θ) with the positive direction of x-axis is /(x_1, y_1) से गुजरने वाली और x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कोण (θ) बनाने वाली सीधी रेखा का समीकरण है $\boxed{\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r}$
where r is the distance of the point (x, y) on line from the point $(x_1\ y_1)$/जहाँ r बिंदु (x, y) की रेखा पर बिंदु $(x_1\ y_1)$ से दूरी है

- *Equation of the straight lines which pass through a given point (x_1, y_1) and make a given angle (α) with the given straight line y=mx+c/सीधी रेखा का समीकरण जो किसी दिए गए बिंदु (x_1, y_1) से होकर गुजरती हैं और दी गई सीधी रेखा y=mx+c के साथ एक दिया हुआ कोण (α) बनाती हैं* $y - y_1 = \frac{m \pm \tan\alpha}{1 \mp m\tan\alpha}(x-x_1)$

- *Genaral eq^n of line in polar form/ध्रुवीय रूप में रेखा का सामान्य समीकरण* $\boxed{a\cos\theta + b\sin\theta = \frac{c}{r}}$
Where = $\cos\theta = \frac{x}{r}$ & $\sin\theta = \frac{y}{r}$
& $r = \sqrt{x^2+y^2}$ & $\theta = \tan^{-}\frac{y}{x}$

- *Normal eq^n of straighl line in polor from/ध्रुवीय रूप में सरल रेखा का सामान्य समीकरण*
$$r\cos(\theta - \alpha) = p$$



- *Line perpendicular to a given line/दी गई रेखा के लंबवत रेखा–*
Line ax + by + c = 0 is given then eq^n of line perpendicular to it will be bx – ay + λ = 0, where c and λ are constant./रेखा ax + by + c = 0 दी गई है तो इस रेखा के लंबवत रेखा का समीकरण bx – ay + λ = 0 होगा, जहाँ c और λ स्थिर हैं।

- *Line parallel to a given line/दी गई रेखा के समानांतर रेखा–*
Line ax + by + c = 0 is given than eq^n of line Parallel to it will be ax + by + λ = 0, where c and λ is constant./रेखा ax + by + c = 0 दिया गया है, इसके समांतर रेखा का समीकरण ax + by + λ = 0, होगा, जहाँ c और λ स्थिर हैं।

- *Distance of A point from A line./किसी बिन्दु की दी गया रेखा दूरी।*
The lenght of the perpendicular from a point (x_1, y_1) to a line ax + by + c = 0 is/एक बिंदु (x_1, y_1) से एक रेखा ax + by + c = 0 पर लंब की लंबाई है–
$$\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

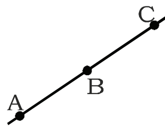
- *Length of perpendicular from the origin to the line ax + by + c = is/मूल बिंदु से रेखा ax + by + c = पर लम्ब की लंबाई है* $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- *Distance between parallel lines/समानांतर रेखाओं के बीच की दूरी*
The distance between two parallel line ax + by + c_1 = 0 and ax + by + c_2 = 0/दो समानांतर रेखाओं ax + by + c_1 = 0 और ax + by + c_2 = 0के बीच की दूरी $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- *Area of A Triangle/त्रिभुज का क्षेत्रफल*
The area of a triangle the Co-ordinate of whose vertices are $(x_1\ y_1)$, (x_2, y_2) and (x_3, y_3) is /एक त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्षों के निर्देशांक हैं
$\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|$

- *Collinearity of three points/तीन बिंदुओं की सरेखता*
I. Three points (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) are collinear iff./तीन बिंदु (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) समरेख हैं यदि–
$x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) = 0$
or $(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_1) = 0$
II. Three points A, b and C are collinear/तीन बिंदु A, b और C समरेख हैं

If slope of line AB = slope of line BC/यदि रेखा AB = का ढाल = रेखा BC का ढाल



- *Condition of concurrenc of three lines*/तीन रेखाओं के संपाती होने की शर्त–

$a_1 x_1 + b_1 y + c_1 = 0$ (i)

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ (ii)

$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ (iii)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

- *Area of parallegram*/समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

and

$a_1 x + b_1 y + d_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + d_2 = 0$

$$\text{Area of } ||gm = \left| \frac{(c_1 - d_1)(c_2 - d_2)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right|$$

- *Standard Equation of a circle*/एक वृत्त का मानक समीकरण

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

where (h, k) is point of center and 'a' is radius

- *General eq^n of A circle.*/एक वृत्त का सामान्य समीकरण।

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

where center/जहां केंद्र = $(-g, -f)$

radius = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

Note:

1. If $g^2 + f^2 - c > 0$ then the radius of the circle is real and hence the circle is also real/तो वृत्त की त्रिज्या वास्तविक है और इसलिए वृत्त भी वास्तविक है।
2. If $g^2 + f^2 + c = 0$ then the radius of circle is zero such a circle is known as a point circle./तब वृत्त की त्रिज्या शून्य होती है ऐसे वृत्त को बिन्दु वृत्त कहते हैं
3. If $g^2 + f^2 - c < 0$ then the radius is imaginary but the centre is real. such circle is an imaginary circle and not pussible to draw./तो त्रिज्या काल्पनिक है लेकिन केन्द्र वास्तविक है। ऐसा वृत्त एक काल्पनिक वृत्त है और इसे बनाना संभव नहीं है।

- If circle eq^n written in the from of/यदि वृत्त के समीकरण को निम्न रूप में लिखा जाए–

$ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

or $x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0$

then center $= \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$

and radius $= \sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{f^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$

- *Diameter form Circle:*/वृत्त का व्यास रूप में समीकरण:

eq^n of the circle drawn on the straight line Joining two given points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as diamter is/दिए गए दो बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को व्यास मानकर सरल रेखा पर खींचे गए वृत्त का समीकरण है

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

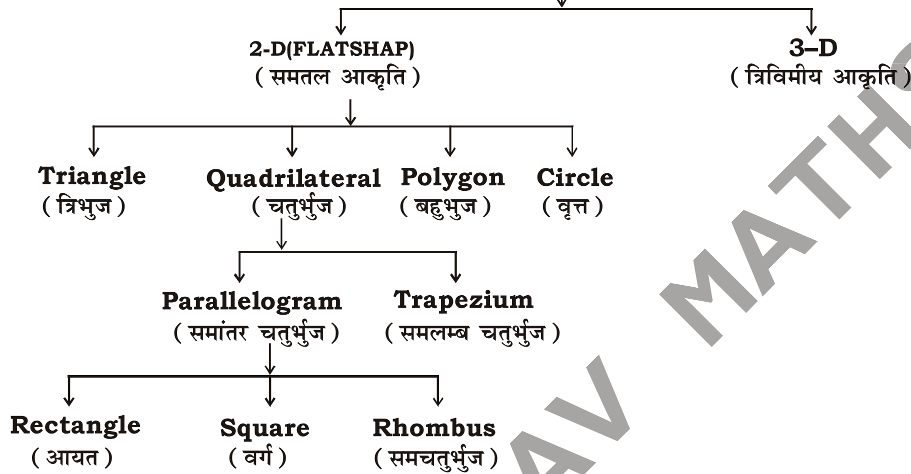
Important Points To Remember

याद रखने के लिए महत्वपूर्ण बिंदु

- When a circle touches x-axis, then its radius is equal to the aboslute value of the y-coordinates of the centre./जब कोई वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है, तब उसकी त्रिज्या केंद्र के y-निर्देशांकों के निरपेक्ष मान के बराबर होती है।
- When a circle touches y-axis, the x-coordinates of its centre, in magnitude, is equal to the radius./ जब एक वृत्त y-अक्ष को स्पर्श करता है, तो इसके केंद्र के x-निर्देशांक, परिमाण में, त्रिज्या के बराबर होते हैं।
- When a circle touches x-axis at the origin, then its centre lies on y-axis and absolute value of y-coordinates of the centre is equal to the radius./ जब कोई वृत्त मूल बिंदु पर x-अक्ष को स्पर्श करता है, तो उसका केंद्र y-अक्ष पर स्थित होता है और केंद्र के y-निर्देशांक का निरपेक्ष मान त्रिज्या के बराबर होता है।
- When a circle touches y-axis at the origin, then its centre lies on x-axis at a distance equal to the radius of the circle./जब कोई वृत्त मूल बिंदु पर y-अक्ष को स्पर्श करता है, तो उसका केंद्र वृत्त की त्रिज्या के बराबर दूरी पर x-अक्ष पर स्थित होता है।
- When a circle touches both the axis, then the coordinates of its centre are $(\pm a, \pm a)$, where a is the radius of the circle./जब कोई वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, तो उसके केंद्र के निर्देशांक $(\pm a, \pm a)$ होते हैं, जहाँ a वृत्त की त्रिज्या है।
- When a circle touches a line, then length of the perpendicular from its centre on the given line is equal to the radius of the circle./जब एक वृत्त एक रेखा को स्पर्श करता है, तो उसके केंद्र से दी गई रेखा पर लंब की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर होती है।

MENSURATION 2D
क्षेत्रमिति (द्विविमीय)

CHAPTER 32



Note:- 1 hectare = 10,000 m^2
100 hectare = 1,000,000 m^2
Weight (mass) = Volume $\times$ density.

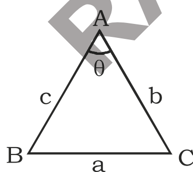
Triangle/त्रिभुज

A triangle is a polygon with three edges and three vertices. It is one of the basic shapes in geometry. It denoted by $\triangle$ ABC.

त्रिभुज एक ऐसा बहुभुज है जिसके तीन किनारे और तीन शीर्ष होते है। यह ज्यामिति की एक आधार आकृति है। इसे $\triangle$ से प्रदर्शित करते हैं।

➢ Type of triangles/त्रिभुजों के प्रकार:-
Triangle are two types.
(i) Based on sides
(ii) Based on angle

(i) Scalene Triangle/विषमबाहु त्रिभुज:-

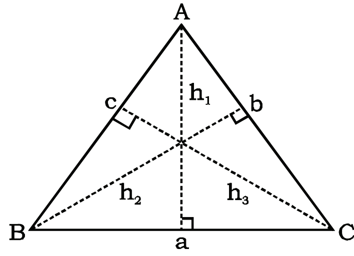


- Area/क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × Base/आधार × Height/ऊँचाई
- Area/क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(Hero's Formula)

- Area $(\Delta) = \frac{1}{2}$ bcsinA = $\frac{1}{2}$ absinC = $\frac{1}{2}$ acsinB
- Perimeter/परिमाप = a + b + c
- **Semi-perimeter/अर्धपरिमाप (S) =** $\frac{(a+b+c)}{2}$
- If lengths of three medians of $\triangle$ ABC are x, y and z units, then:
  यदि त्रिभुज ABC की माध्यिकाओं की लंबाई x, y तथा z इकाई है, तब
  $A = \frac{4}{3}\sqrt{Sm(Sm - x)(Sm - y)(Sm - z)}$
  where, $Sm = \frac{x+y+z}{2}$
- In circle Radius/अंत:वृत्त की त्रिज्या $= \frac{\text{Area of }\Delta}{\text{Semi–Perimeter}}$
  $r = \frac{\Delta}{s}$
- Circum-circle Radius/बाह्य वृत्त की त्रिज्या (R)
  $= \frac{abc}{4 \times \text{area of }\Delta}$

(a, b, c = length of sides of Triangle)
(जहाँ a, b, c = त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई)

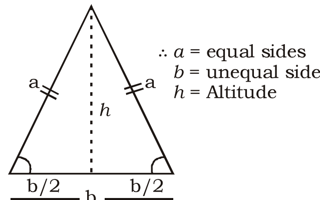
- 

Area $(\Delta) = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Height} = \frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} bh_2 = \frac{1}{2} ch_3$

$\therefore ah_1 = bh_2 = ch_3 = \text{(constant)}$

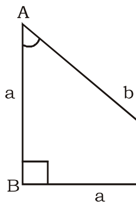
$\therefore a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}$ **(Result)**

2. Isosceles Triangle/समद्विबाहु त्रिभुजः-



- Area/क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$
- Perimeter/परिमाप = 2a + b
- h (Altitude)/(अभिलम्ब)= $\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$

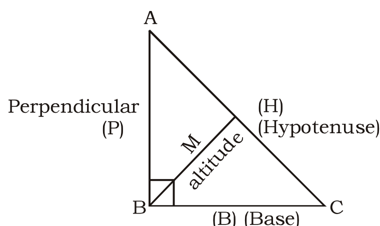
If an isosceles triangle is right angle triangle than/यदि समद्विबाहु त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है, तब



- Area/क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}a^2$
- h (hypotenuse)/(कर्ण) = $a\sqrt{2}$

3. Right angle triangle/समकोण त्रिभुजः-

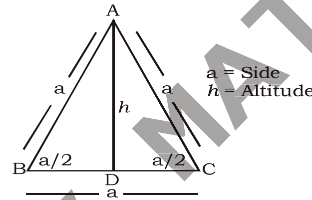
It is a triangle with an angle of 90° $(\pi/2)$ radius.
समकोण त्रिभुज में एक कोण 90° या $\pi/2$ रेडियन का होता है।



- Area/क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × Base/आधार × Height/ऊँचाई
- Perimeter/परिमाप = P + B + H
- Altitude/अभिलम्ब (M) = $\frac{P \times B}{H}$
- $H^2 = P^2 + B^2$/[(कर्ण)^2 = (लंब)^2 + (आधार)^2]
- In radius/अंतः त्रिज्या (r) = $\frac{P+B-H}{2}$ or $\frac{PB}{P+B+H}$
- Circum radius/परित्रिज्या (R) = $\frac{H}{2}$

4. Equilateral triangle/समबाहु त्रिभुजः-

It is a triangle whose all sides and angle are equal.
यह एक ऐसा त्रिभुज होता है जिसकी सभी भुजाएं और सभी कोण बराबर होते है।



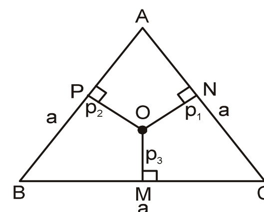
- Area/क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
- Perimeter/परिमाप (2s) = 3a
- Altitude/अभिलम्ब (h) = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
- Incircle Radius/अंतःवृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ or $\left(\frac{h}{3}\right)$
- Circumcircle Radius/परिवृत्त की त्रिज्या (R)= $\frac{a}{\sqrt{3}}$ or $\left(\frac{2h}{3}\right)$

We can say "r" = $\frac{R}{2}$ /हम कह सकते हैं कि "r" = $\frac{R}{2}$

- $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

- If P_1, P_2 and P_3 are perpendicular lengths from any interior point (O) of an equilateral Δ ABC to all its three sides respectively, then:-
किसी समबाहु त्रिभुज ABC के अंदर स्थित किसी बिन्दु 'O' से उसकी तीनों भुजाओं पर डाले गए लंबों की लंबाईयाँ क्रमशः P_1, P_2 तथा P_3 हैं, तबः-

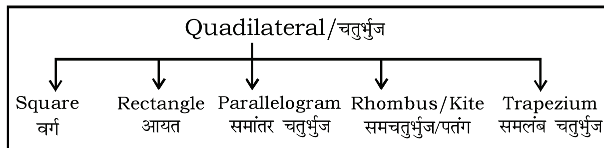


$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \;\; = h$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)$$

a(side)	height	Area	
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	
$\downarrow \times K$	$\downarrow \times K$	$\downarrow \times K^2$	
2K	$\sqrt{3}$ K	$\sqrt{3}$ K^2	(Result)

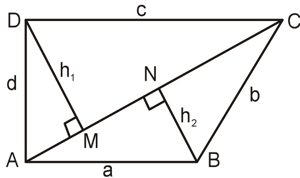
➢ ***Quadrilateral/चतुर्भुज***



Quadrilateral:– A closed shape and a type of polygon that has 4 sides, 4 vertices abd 4 angles.

चतुर्भुज:– एक बंद आकृति और एक प्रकार का बहुभुज जिसमें 4 भुजाएँ, 4 शीर्ष और 4 कोण होते है।

(i) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$



(ii) Area of quadrilateral = $\frac{1}{2}$ × one diagonal × (sum of per pendicular to it from opposite vertices)

चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण × (इसके शीर्षों से विकर्ण पर डाले गए लंबों की लंबाइयों का योग)

$= \frac{1}{2}(AC)(h_1 + h_2)$

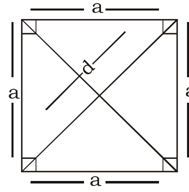
(iii) P = a + b + c + d

➢ ***Square/वर्ग***

A square is a four-Sided flat shape where every angle is 90° and all the four sides are equal also the diagonals are equal and bisect each other at 90°.

वर्ग एक 4 भुजाओं वाली समतल आकृति है जिसका प्रत्येक कोण 90° का होता है और चारों भुजाएं आपस में बराबर होती हैं। वर्ग के विकर्ण भी आपस में बराबर होते हैं तथा एक दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं।

- Every Square is a Rhombus but every Rhombus is not a square./प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज होता है लेकिन प्रत्येक समचतुर्भुज वर्ग नहीं होता है।



1. Area = a^2 = $(side)^2$ = $\frac{1}{2}$ × $(diagonal)^2$

   क्षेत्रफल = a^2 = (भुजा)² = $\frac{1}{2}$ × (विकर्ण)²

2. Perimeter = 4a/परिमाप = 4a
3. Diagonal (d) = $\sqrt{2}$ a/विकर्ण (d) = $\sqrt{2}$ a
4. Area of Path Inside Square = 4d (x–d)

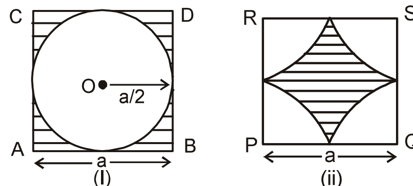
   ∴ d = length of Path

   x = length of Square

   वर्ग के अन्दर बने रास्ते का क्षेत्रफल = 4d (x–d)

   जहाँ, d = रास्ते की चौड़ाई

   x = वर्ग की लम्बाई
5. Area of Path outside Square/वर्ग के बाहर बने रास्ते का क्षेत्रफल = 4d (x+d)
6. Area of Path midway Square/वर्ग के बीचों-बीच बने रास्ते का क्षेत्रफल = d (2x–d)
7. In circle Radius/वर्ग के अंत:वृत्त की त्रिज्या $= \frac{\text{Side / भुजा}}{2}$
8. Circumcircle Radius/वर्ग के वाह्य वृत्त की त्रिज्या = $\frac{\text{Side / भुजा}}{\sqrt{2}}$
9. Some-useful Results/कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम:–



In figure (i) ABCD is a square of side 'a'/चित्र (i) a भुजा वाला ABCD एक वर्ग है।

(a) O is the centre of the incircle./O अंत: वृत्त का केंद्र है।

In figure (ii) PQRS is a square of side 'a'/चित्र (ii) a भुजा वाला PQRS एक वर्ग है

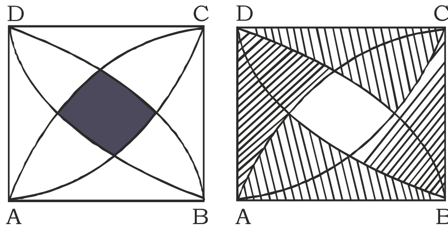
(b) P,Q,R and S are the centres of four quad-rant of radius a/2 each./P,Q,R और S चार चतुर्थांशों के केंद्र हैं तथा प्रत्येक चतुर्थांश की त्रिज्या a/2 है।

In both case– Area of shaded region/दोनों स्थिति में – छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{3}{14}a^2$

10. If the additional of square increases by x times, then the area of the square becomes x^2 times./ यदि वर्ग की भुजा को x गुना बढ़ा दिया जाये तब वर्ग का क्षेत्रफल x^2 गुना हो जाता है।

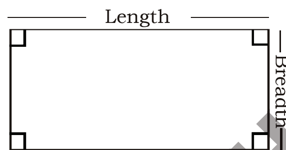
11. If the area of the square is a cm^2, then the area of the circle formed by the same perimeter is/ यदि वर्ग का क्षेत्रफल a सेमी², तब समान परिमाप से बनाए गए वृत्त का क्षेत्रफल होता है = $\frac{4a}{\pi}cm^2$/सेमी²

12. Area of shadded part/छांयाकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

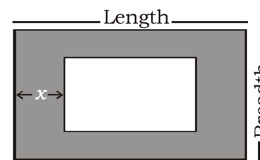


- $a^2-4\left[\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\pi a^2}{12}\right]$ • $a^2-\sqrt{3}a^2+\frac{\pi a^3}{3}$
- $a^2\left[1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right]$

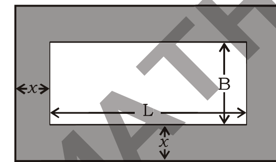
➤ ***Rectangle/आयत*** : Every angle is a right angle (90°)/प्रत्येक कोण समकोण (90°) होता है।



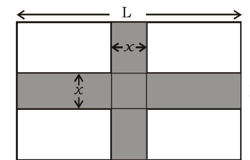
1. Its diagonals are equal & bisect each other./इसके विकर्ण बराबर होते हैं और एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
2. Area = Length × Breadth/क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
3. Perimeter = 2 (Length + Breadth)/परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)
4. Diagonal (d) = $\sqrt{l^2+b^2}$ /विकर्ण (d) = $\sqrt{\text{ल}^2+\text{चौ}^2}$
5. (i) Area of a path inside a rectangular field/ आयताकार मैदान के अन्दर बने रास्ते का क्षेत्रफल:– अंदर बने रास्ते का क्षेत्रफल = $2x$ (लम्बाई + चौड़ाई $-2x$)
(जहाँ, x = रास्ते की चौड़ाइ)
Area of path = $2x\,(l + b - 2x)$
(ii) Perimeter (P) = inner P + Outer P
परिमाप (P) = आंतरिक P + बाहरी P
= $2(l + b) + 2(l + b - 4x) = 4(l + b - 2x)$



6. (i) Area of path outside a rectangular field/ आयताकार मैदान के बाहर बने रास्ते का क्षेत्रफल:–
Area of path outside/बाहर बने रास्ते का क्षेत्रफल = 2x (l/लम्बाई + b/चौड़ाई + 2x)
(ii) Perimeter (P) = inner Perimeter + outer Perimeter/परिमाप (P) = आंतरिक परिमाप + बाहरी परिमाप = 2(l + b) + 2(l + b + 4x)= 4 (l + b + 2x)



7. (i) Area of path midway/मैदान के बीच बने रास्ते का क्षेत्रफल = $x\,(l + b - x)$
(ii) Perimeter of Path (P)/रास्ते का परिमाप (P) = $2(l + b) - 4x = 2(l + b - 2x)$



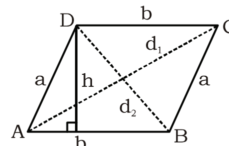
8. Room as a Rectangular figure/आयताकार कमरा:-
Area of four walls of a room/आयताकार कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल = Perimeter × Height = 2 × (L + B) × H

9. Area of Roof and 4 walls/चारों दीवारों और छत का क्षेत्रफल = 2H (L + B) + LB
(this formula can be use when we have to paint a whole room./यह सूत्र तब प्रयोग कर सकते हैं जब हमें पूरे कमरे की पुताई करानी हो)

➤ ***Parallelogram/समांतरचतुर्भुज***

If opposite sides of a quadrilateral are parallel, it is called parallelogram. Its opposite sides are also equal in length.

यदि किसी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएं समांतर हो, तब यह समांतर चतुर्भुज कहलाता है। इसकी आमने-सामने की भुजाएं लम्बाई में भी बराबर होती हैं।



(i) Area/क्षेत्रफल = base/आधार $\times$ height/ऊँचाई = bh

(ii) Perimeter/परिमाप = 2(a + b)

(iii) $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

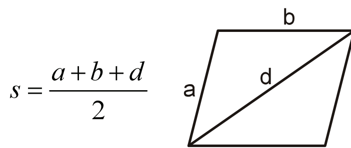
= length of diagonals/विकर्ण की लम्बाई/$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

(iv) Area (A)/समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (A)

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d_1)} = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d_2)}$

where a & b are adjacent sides, d is the length of diagonal connecting the ends of the two sides and, जहां a और b संलग्न भुजाएं है तथा d उस विकर्ण की लम्बाई है जो दो भुजाओं के अंत बिन्दुओं को मिलाता है।

$s = \frac{a+b+d}{2}$

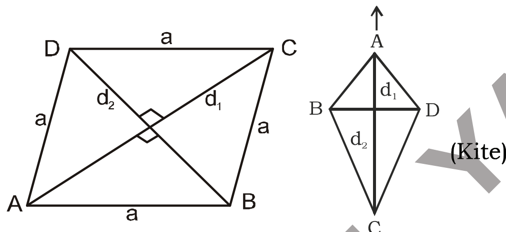


➢ ***Rhombus/समचतुर्भुज***

It is a Quadrilateral whose all four sides are equal. Diagonal bisect each other at 90°.

यह एक प्रकार का समांतर चतुर्भुज है जिसकी चारों भुजाएं बराबर होती हैं। इसके विकर्ण एक-दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते है।

(AB = AD and BC = DC)



1. Diagonals bisect each other at 90°/विकर्ण एक दूसरे को 90° पर समद्विभजिक करते हैं

2. $A = \frac{1}{2}(d_1 \times d_2)$

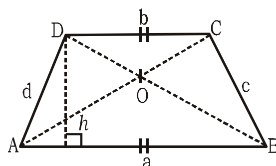
3. $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

4. P = 4a

5. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

➢ ***Trapezium/समलम्ब चतुर्भुज***

It is a quadrilateral, whose any two opposite sides are parallel./यह एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी आमने-सामने की कोई दो भुजाएं समांतर होती हैं।



(i) Perimeter/परिमाप = a + b + c + d

(ii) Area/क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$(Sum of Parallel sides) $\times$ Distance b/w them $= \frac{1}{2}(a + b) \times h$

(iii) $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2(ab)$

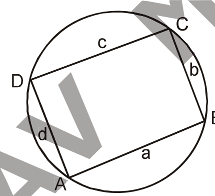
(sum of squares of non-parallel sides) + 2 (product of parallel sides)

(iv) If diagonals intersect at O, then/यदि विकर्ण एक-दूसरे को O पर काटते हैं, तब

$\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{DC}$

$[\because \Delta AOB \sim \Delta COD]$

Cyclic Quadrilateral/चक्रीय चतुर्भुज:- A quadrilateral whose vertices lie on the circumference of the circle./वह चतुर्भुज जिसके शीर्ष वृत्त की परिधि पर स्थित होती हैं चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।



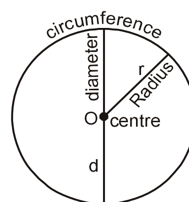
(i) Area/क्षेत्रफल (A) = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

where, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

(ii) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2\pi$

(iii) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180° = \pi$

➢ ***Circle/वृत्त***



(i) Circumference or Perimeter of circle (P) = /वृत्त की परिधि या परिमाप (P) = $2\pi r = \pi d$

(d = व्यास) $2\pi r = \pi d$ (d = diameter)

(ii) Area/क्षेत्रफल = A = $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

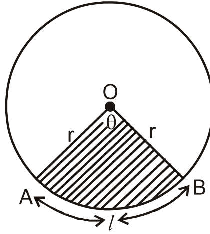
$\therefore$ Diameter of the circle/वृत्त का व्यास = d= $\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$

radius	$c = 2\pi r$	$A = \pi r^2$	
7	44	154	
7K	44K	$54K^2$	
24.5	44×3.5	$154\times(3.5)^2$	$\therefore$ 24.5=7×3.5
28	44×4	154×16	

➢ *Sector of a circle/एक वृत्त का त्रिज्यखंड*

A sector is a figure enclosed by two radii and an arc lying between them./दो त्रिज्याओं तथा उनके अन्तिम बिंदुओं से बनने वाले चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्यखण्ड कहते हैं।

For sector AOB,/त्रिज्यखण्ड AOB के लिए ,



(i) l = Arc AB $= (2\pi r)\dfrac{\theta}{360°}$

(ii) Area of sector ACBO/त्रिज्यखण्ड ACBO का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ (arc AB)× radius/ $= \frac{1}{2}$ (चाप AB)×त्रिज्या

$= (\pi r^2)\dfrac{\theta}{360°}$

Length of $\overline{AB}$ = l = $\dfrac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

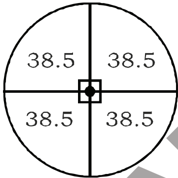
$\theta° = \theta \times \dfrac{\pi^c}{180}$

$l = r \times \dfrac{\pi\,\theta}{180}$

$l = r\theta^c$ or $\theta^c = \dfrac{l}{r}$

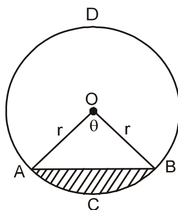
(iii) Perimeter/परिमाप (P) = Arc/चाप AB + 2r = l + 2r

7	:	44	:	154	
14	:	88	:	616	
21	:	132	:	1386	**(Result)**
3.5	:	22	:	38.5	



➢ *Segment of a circle/वृत्त का वृत्तखण्ड:*

A figure enclosed by a chord and an arc which it cuts off./एक चाप तथा इसके अन्तिम छोरों को मिलाने वाली सरल रेखा के बीच के क्षेत्र को वृत्त खण्ड कहते हैं



(i) Area of segment ACB. (minor segment) = area of sector ACBO – area of Δ OAB./वृत्तखण्ड ACB का क्षेत्रफल (लघुवृत्तखण्ड) = त्रिज्यखण्ड ACBO का क्षेत्रफल - ΔOAB का क्षेत्रफल

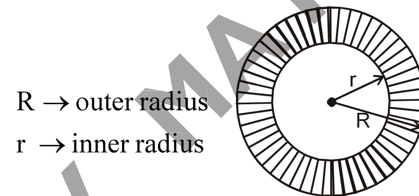
(ii) Area of segment ADB (major segment) = area of circle – area of segment ACB.वृत्तखण्ड ADB का क्षेत्रफल (दीर्घवृत्त खण्ड)= वृत्त का क्षेत्रफल - वृत्तखण्ड ACB का क्षेत्रफल

(iii) Perimeter/परिमाप (P) = arc/चाप AB + $\theta . r$

$= 2r\left[\dfrac{\pi\theta}{360°} + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$

(iv) Arc/चाप = Angle/कोण × Radius/त्रिज्या

➢ *Ring or Circular Path/वलय या वृत्ताकार रास्ता:*



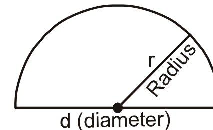
(i) Area/क्षेत्रफल (A) = π (R^2 - r^2)

(ii) Perimeter/परिमाप = 2π (R + r)

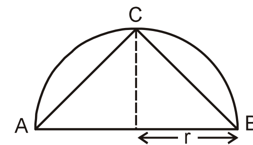
➢ *Semi Circle/अर्द्धवृत्त*

(i) Circumference (Perimeter)/परिधि (परिमाप) $= \pi r + 2r$ $= \pi r + d$

(ii) Area/क्षेत्रफल (A)= $\dfrac{\pi r^2}{2}$.



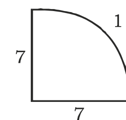
(iii) The area of largest triangle inscribed in a semi-circle of radius r is r^2./'r' त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त के अंदर बने सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल r^2 है।



Area of the/का क्षेत्रफल Δ ACB = r^2

$\left[\frac{1}{2} \times r \times 2r\right]$

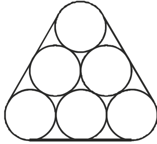
• For a quadrant/एक चतुर्थाश के लिए



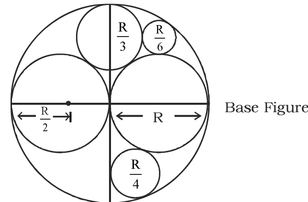
Radius त्रिज्या	Circumference परिधि	Area क्षेत्रफल
7	25	$\frac{77}{2} = 38.5$

Perimeter/परिधि= $r + r + = 2r + \frac{2\pi r}{4} = 2r + \frac{\pi r}{4}$

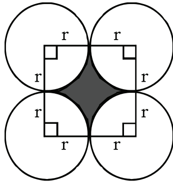
Area/क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{4}$

- 

Length of string/डोरी की लंबाई = $2\pi r + 2 \times$ number of circles/वृत्तों की संख्या

- 

➢ ***Find the area of shadded part/छायांकित भाग का क्षेत्रफल***

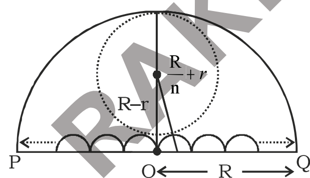


Area of square – sector/वर्ग का क्षेत्रफल – त्रिज्यखंड

$$4\pi^2 - \frac{\pi r^2}{360} \times 90 \times 4 = r^2[4-\pi]$$

- n semi-circle (even) drawn on diameter PQ
  n अर्द्धवृत्त (सम) व्यास PQ पर खींचे गए हैं।

Radius of each small semi-circle/प्रत्येक छोटे अर्धवृत्त की त्रिज्या = $\frac{R}{n}$

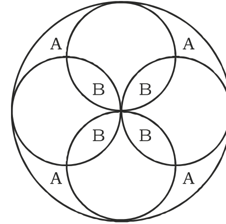


$$\left(\frac{R}{n}+r\right)^2 = \left(\frac{R}{n}\right)^2 + (R-r)^2$$

After solving this (इसे हल करने के बाद)

radius of small circle (छोटे वृत्त की त्रिज्या) $r = \frac{nR}{2(n+1)}$

- Find A/B = ?

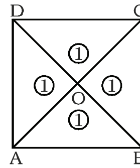


A = B

$\frac{A}{B} = 1 : 1$

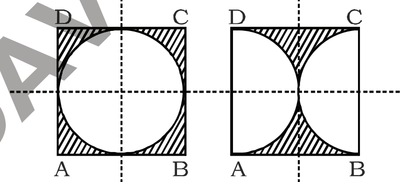
SOME IMPORTANT RESULT

(A)



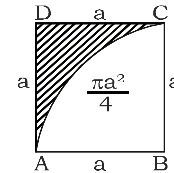
ABCD is a square.
Diagonal AC & BD intersects at O.
Here,
ar (AOB) = ar (BOC) = ar(COD) = ar (DOA)

(B)



Area of shaded region is equal in each case.
छायांकित भाग का क्षेत्रफल प्रत्येक स्थिति में समान होगा।

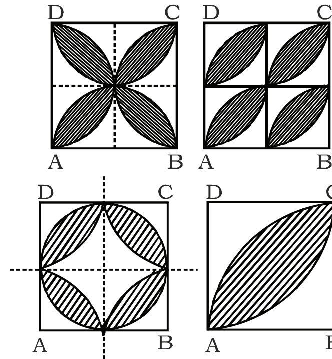
(C)



Area of shaded region/छायाकिंत भाग का क्षेत्रफल

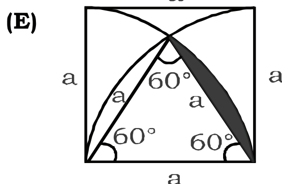
$= a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(4 - \pi)$

(D)



Area of shaded region is equal each case.
छायांकित भाग का क्षेत्रफल प्रत्येक स्थिति में बराबर है।

(E)

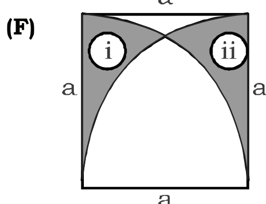


Area shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{12}\left\{2\pi - 3\sqrt{3}\right\}$

= 9.05% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल का 9.05%

(F)

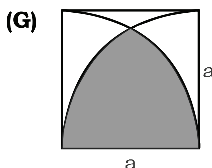


area of (क्षेत्रफल) (I) = area of (क्षेत्रफल) (II)

area of (क्षेत्रफल) (I) or (II) $\frac{a^2}{12}\left\{3\sqrt{3} - \pi\right\}$

= 17.1208% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल का

(G)

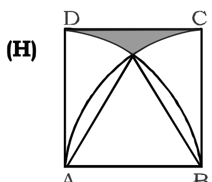


Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{12}\left\{4\pi - 3\sqrt{3}\right\}$

= 61.4166% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल

(H)

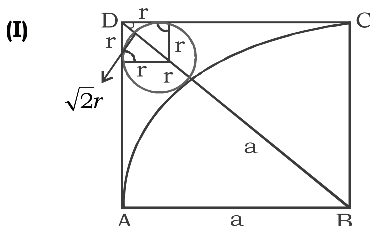


Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{12}\left\{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}\right\} = 4.3388\%$ of square area/वर्ग का क्षेत्रफल

➢ ***Radius/त्रिज्या***

(I)



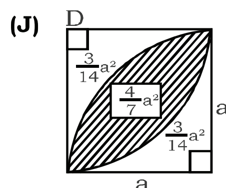
$\sqrt{2}r + r + a = \sqrt{2}a$

$r\left(\sqrt{2}+1\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)a$

$r = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)a}{\sqrt{2}+1}$

$\boxed{r = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 a}$

(J)

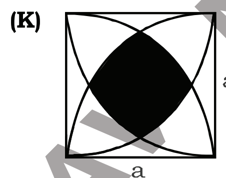


Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{2}(\pi - 2) = \frac{4}{7}a^2$

= 57.02% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल

(K)

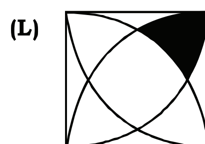


Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{3}\left\{3\left(1-\sqrt{3}\right)+\pi\right\}$

= 31.5146% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल

(L)



Area shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

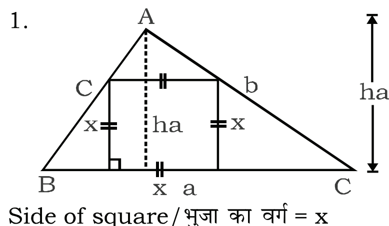
$= \frac{a^2}{12}\left[\pi - 12 + 6\sqrt{3}\right]$

= 12.78% of square area/वर्ग का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{8}$ of square area/वर्ग के क्षेत्रफल का $\frac{1}{8}$ (approx.)

❑ ***3 Square inside a triangle:/जब वर्ग त्रिभुज के अंदर हो***

1.



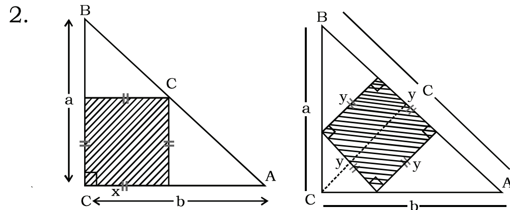
Side of square/भुजा का वर्ग = x

$$\boxed{\frac{1}{x}=\frac{1}{ha}+\frac{1}{a}}$$

$$\boxed{x=\frac{a\times ha}{a+ha}}$$

Where x is on BC./जहाँ x, BC पर है।

2.



$$\boxed{x=\frac{b\times a}{b+a}}$$

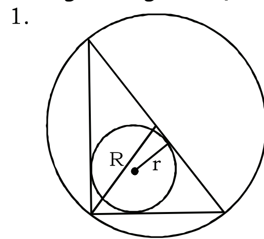
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\boxed{y=\frac{abc}{c^2+ab}}$$

Here x > y

❑ ***4 Right angled* Δ*/समकोण त्रिभुज:***

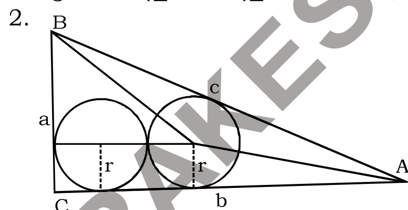
1.



$$r=\frac{p+b-h}{2};\ R=\frac{h}{2}$$

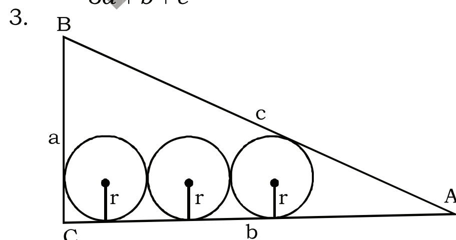
$$r=\frac{\Delta}{s};\ R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{p\times b\times h}{4\Delta}$$

2.



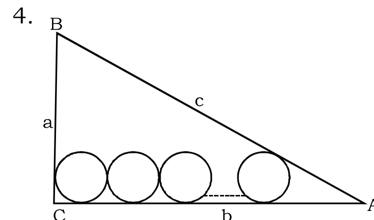
$$r=\frac{ab}{3a+b+c}$$

3.



$$r=\frac{ab}{5a+b+c}$$

4.

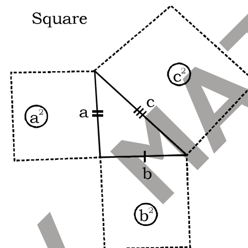


n – identical circles/समान वृत्त

$$r=\frac{ab}{(2n-1)a+b+c}$$

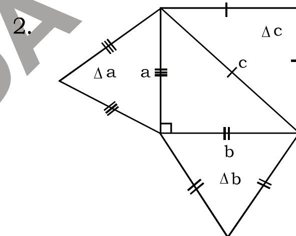
❑ ***5 Pythagoras theorem:/पाइथागोरस प्रमेय***

1. Square $\boxed{c^2=a^2+b^2}$



Area $(\square_c)=\text{ar}(\square_b)+\text{ar}(\square_a)$

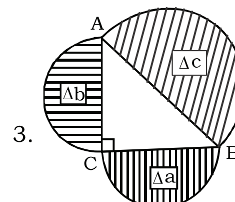
2.



Equilateral Δs

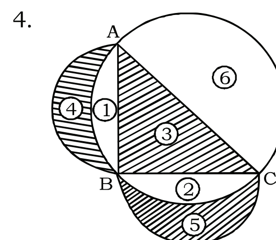
$$\text{ar}(\Delta_c)=\text{ar}(\Delta_a)+\text{ar}(\Delta_b)$$

3.



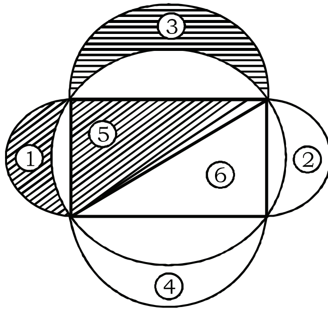
$\text{ar}(\Delta_a)=\text{ar}(\Delta_b)+\text{ar}(\Delta_c)$

4.



i) area(6) = area(1) + area(2) + area(3)
ii) area(4) + area(5) = area(3)

5.



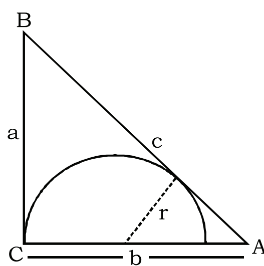
Here,

i) area(1) = area(2)
   area(3) = area(4)

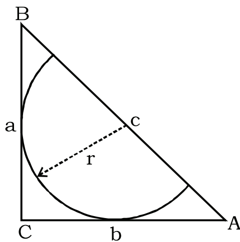
ii) area of (1) + (2) + (3) + (4) = area of rectangle4

❑ **6**

1. $r = \frac{ab}{a+b}$

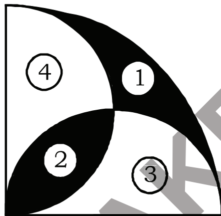


2. $r = \frac{ab}{a+b}$



❑ **7**

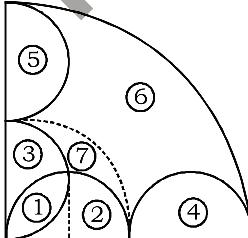
1.



i) area of region (1) = area of region (2)

ii) area of region (3) = area of region (4)

2.

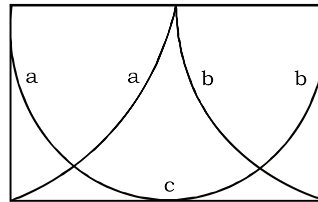


i) area of (1) = area of (7)

ii) area of (3) = area of (2)

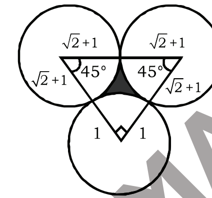
iii) area of (5) = area of (4) = area of [(3) + (1)] = area of [(2) + (1)]

3.



Perimeter of Semicircle/अर्द्धवृत्त का परिमाप = a + b + c

4.



Area of shaded part/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+2\right)^2-\left[\frac{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{360}\times 45\times 2\right]$$

➢ Miscellaneous Problem/विविध प्रश्न

Some Useful Results/कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम:

1. If each of the defining dimensions or sides of any 2-D figures are increased (or decreased) by x%, its Perimeter also increases (or decreases) by x%./यदि किसी 2-D आकृति की defining dimensions या भुजा x % बढ़ा या घटा दिया जाए तो इसका परिमाप भी क्रमशः बढ़ या घट जाएगा।
2. If all the sides of a quadrilateral are increased (or decreased by x%, its diagonals also increases (or decreasses) by x%./यदि किसी चतुर्भुज की सभी भुजाएं x % बढ़ा (या घटा) दी जाएं, तो इसका विकर्ण भी x % बढ़ या घट जाएगा।
3. The number of revolutions made by a circular wheel of radius r in travelling distance 'd' is given by-

   (no. of revolutions) n = $\frac{d}{2\pi r}$ /r त्रिज्या के पहिए के द्वारा 'd' दूरी तय करने में लगाए गए चक्करों की संख्या:

   (चक्करों की संख्या) n = $\frac{d}{2\pi r}$
4. If each of the dimensions or sides of any 2D figure (triangle, rectangle, square, circle, quadrilateral, pentagon, hexagon etc.) is changed by x%, its area changes by $x\left(2+\frac{x}{100}\right)$% /यदि किसी 2-D

आकृति (त्रिभुज, आयत, वर्ग, वृत्त, चतुर्भुज, पंचभुज, षष्टभुज आदि का प्रत्येक defining dimension या भुजा x% से घट या बढ़ रही है तो इसका क्षेत्रफल $x\left(2+\frac{x}{100}\right)$% से बदलेगा।

$x \to$ +ve यदि बढ़ता है
$x \to$ –ve यदि घटता है
$x \to$ +ve if increases
$x \to -ve$ if decreases

MENSURATION 3–D
क्षेत्रमिति 3–D

CHAPTER **33**

3D shapes: They have surface area and volume.

3D आकृतियाँ: इनका पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन होता है।

(1) Cube/घन

(2) Rectangular Prism (Cuboid)/घनाभ

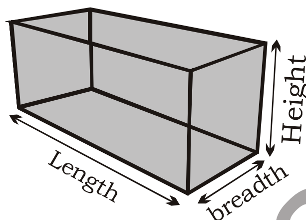
(3) Cylinder/बेलन **(4)** Cone/शंकु

(5) Sphere and Hemisphere/गोला और अर्धगोला

(6) Prism/प्रिज्म **(7)** Pyramid/पिरामिड

Cuboid (Parallelopiped)/घनाभ

A cuboid is a 3 dimensional shape.
Faces = 6
Edges = 12
vertices = 8
diagonal = 4



Look at this shape./इस आकृति को देखें

There are 3 different measurements:/इसमें 3 विभिन्न गणक है:–

Length, Breadth, Height
लंबाई , चौड़ाई, ऊँचाई

Formula/सूत्र

(i) (a) $V = l \times b \times h$ cubic units
घनाभ का आयतन (V) = $l \times b \times h$ घन यूनिट

(b) $V=\sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$ cubic units
आयतन (V)=$\sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$ घन यूनिट

Where/जहाँ,
A_1 = area of base or top = lb sq. units
आधार और शिखर का क्षेत्रफल = lb = लंबाई × चौड़ाई
A_2 = area of one side face =bh sq. units
एक छोर का क्षेत्रफल = bh = चौड़ाई × ऊँचाई
A_3 = area of other side face = hl sq. units
= दूसरे छोर का क्षेत्रफल = hl. = ऊँचाई × लंबाई

(ii) Lateral surface Area /Curved surface area/ Area of four walls of cuboid
घनाभ का पार्श्वीय पृष्ठ/वक्र पृष्ठ/ चारो दिवारो का क्षेत्रफल
= Perimeter of Base × height = 2 (l + b) × h sq.units
= आधार का परिमाप × ऊँचाई = 2 (लंबाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

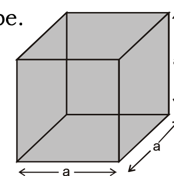
(iii) Total surface Area of cuboid = 2(lb + bh + hl) sq. units
घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(लंबाई×चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊंचाई × लंबाई) वर्ग यूनिट

(iv) Diagonal of cuboid/घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$ units

(v) To find total surface area of a cuboid if the sum of all three sides and diagonal are given.
अगर तीनो भुजाओ का योग और विकर्ण दिया गया है तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल नीचे दिये गए सूत्र से निकालते है।
Total surface area = (Sum of all three sides)^2 – (Diagonal)^2/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = (तीनो भुजाओ का योग)^2 – विकर्ण^2

CUBE/घन

A cube is a 3 dimensional shape.
Faces = 6
Edges = 12
Vertices = 8
Diagonal = 4



Consider a cube of edge a units.
It is a special type of cuboid in which l = b = h = a units i.e. each face is a square./यह एक विशेष प्रकार का घनाभ होता है जिसमें l = b = h = a यूनिट i.e. प्रत्येक छोर एक वर्ग होता है। ⇒ a यूनिट किनारे का घन मान लो

(i) Volume of cube = a^3 cubic units/घन का आयतन = a^3 घन यूनिट

(ii) Lateral surface Area of cube = $4a^2$sq.units/घन का पार्श्वीय पृष्ठ क्षेत्रफल = $4a^2$ वर्ग यूनिट

(iii) Total surface Area of cube = $6a^2$sq.units/घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$ वर्ग यूनिट

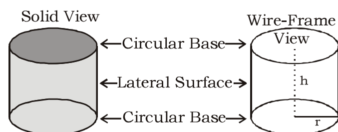
(iv) Diagonal of cube (d)/घन का विकर्ण (d) = $\sqrt{3}$ a units/ यूनिट

(v) Face diagonal of cube/घन के छोर का विकर्ण = $\sqrt{2}$ a units

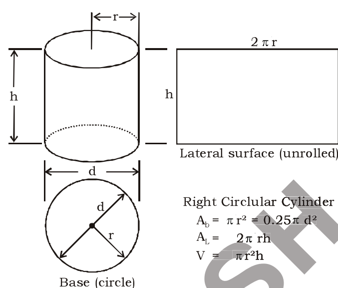
(vi) Volume of cube/घन का आयतन= $\left(\sqrt{\frac{\text{surface area}}{6}}\right)^3$ cubic units/ घन यूनिट

Right Circular Cylinder/समलंब वृत्तिय बेलन

A **Right circular cylinder** is a three-dimensional object with two congruent circles as parallel bases and a lateral surface consisting of a rectangle. Volume and surface area of a **Right Circular Cylinder.** if 'r' is the radius of a circular base of the cylinder and 'h' is the height of the cylinder./एक समलंब वृत्तीय बेलन एक 3D आकृति होती है जिसमें दो सर्वांगसम वृत्त आधार के समानांतर होते है और एक आयताकार पार्श्वीय पृष्ठ होता है। बेलन के वृत्ताकार आधार की त्रिज्या r है और बेलन की ऊँचाई h है।



A right circular cylinder is a cylinder whose base is a circle and whose elements are perpendicular to its base. एक समलंब वृत्तिय बेलन एक बेलन है जिसका आधार एक वृत्त होता है और जिसके अवयव आधार पर लंब होते है।



Fromulae for Right Circular Cylinder/बेलन के लिए सूत्र

Area of the base, A_b/आधार का क्षेत्रफल, A_b

$$A_b = \pi r^2$$
$$A_b = \frac{\pi}{4}d^2$$

Lateral surface Area, A_L/पार्श्वीय पृष्ठीय क्षेत्रफल, A_L

$$A_L = 2\pi rh$$
$$A_L = \pi dh$$

Volume, V/आयतन, V

$$V = A_b h$$
$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \frac{\pi}{4}d^2 h$$

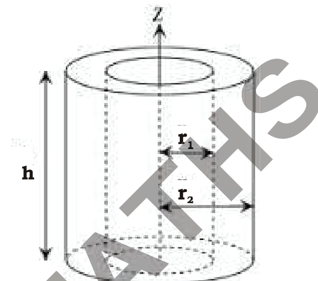
Total surface Area, A_T/कुल क्षेत्रफल, A_T

Total surface area (open both ends)/कुल क्षेत्रफल (दोनों सिरे खुले हुए), $A_L = A$

Total surface Area (open one end)/कुल क्षेत्रफल (एक सिरा खुला हुआ), $A = A_b + A_L$

Total surface Area (closed both ends)/कुल क्षेत्रफल (दोनों सिरे बंद), $A = 2A_b + A_L$

Hollow Cylinder/खोखला बेलन



(i) Volume of Hollow cylinder/खोखला बेलन का आयतन (V) $= \pi(r_2^2 - r_1^2)h$

(ii) Curved surface area/खोखला बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(r_1 + r_2)h$

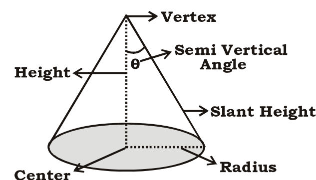
(iii) Total surface area = inner curved surface area + Outer curved surface area + area of Base and Top/खोखला बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi(r_1 + r_2)[h + (r_2 - r_1)]$

(iv) Thickness (t)/मोटाई (t) = $(r_2 - r_1)$

Right Circular Cone/समलंब वृत्तिय शंकु

A right circular cone is one whose axis is perpendicular to the plane of the base. We can generate a right cone by revolving a right triangle about one of its legs./एक लंब वृत्तीय शंकु वह होता है जिसका अक्ष आधार के प्लेन लंब होता है हम समकोण त्रिभुज की किसी भी भुजा को अक्ष मानते हुऐ लंब वृत्तीय शंकु बना सकते है।



Formulae of Right Circular Cone/लंब वृत्तीय शंकु के सूत्र

For a right circular cone of radius r, height h and slant height l, we have/r त्रिज्या, h ऊँचाई और l तिर्यक ऊँचाई वाले शंकु के लिए :

Lateral surface area of a right circular cone $= \pi rl$/लंबवृत्तिय शंकु का पाश्वीय पृष्ठीय क्षेत्रफल

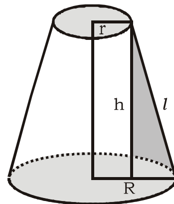
Total surface area of a right circular cone $= \pi(r + l)r$/ लंबवृत्तिय शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

Volume of a right circular cone/लंबवृत्तिय शंकु का आयतन= $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Note:- Area is measured in square units and volume is measured in cubic units./क्षेत्रफल को वर्ग यूनिट जबकि आयतन को घन यूनिट में नापते है।

Frustum of a right circular cone/लंब वृत्तीय शंकु का छिन्नक

A frustum of a cone or truncated cone is the result of cutting a cone by a plane parallel to the base and removing the part containing the apex./एक शंकु को आधार के प्लेन के समानान्तर काटने और ऊपर का भाग (शीर्ष वाला भाग)हटा देने पर जो आकृति प्राप्त होती है उसे लंब वृत्तीय शंकु का छिन्नक कहते है



slength height/तिर्यक ऊँचाई

$l = \sqrt{h^2+(R-r)^2}$

Lateral Area of a frustum Cone/छिन्नक का पार्श्वीय पृष्ठ क्षेत्रफल

$A_L = \pi\ (R + r)\ l$

Surface Area of a frustum Cone छिन्नक का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$A_T = \pi\ [\ l\,(R + r) + R^2 + r^2\ ]$

Volume of a frustum Cone/छिन्नक का आयतन

$V = \frac{1}{3}.\pi.h\left(R^2+r^2+R.r\right)$

Sphere/गोला

A sphere is a solid bounded by a closed surface every point of which is equidistant from a fixed point called the center. Most familiar examples of a sphere are baseball, tennis ball, bowl, and so forth. /गोला एक ठोस आकृति होती है जो बंद सतह से घिरी होती है। सतह पर प्रत्येक बिंदु एक स्थिर बिंदु (केन्द्र) से समान दूरी पर होती है बेस बॉल, टेनिस बॉल आदि गोले के उदाहरण है

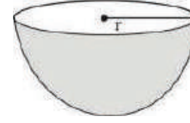
Surface Area and Volume of a Sphere/गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन: If 'r' is the radius and 'd' is the diameter of a great circle, then/ अगर बड़े वृत्त की त्रिज्या r और व्यास d तब

(i) Surface area of a sphere = 4 times the area of its great circle/गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4 × बड़े वृत्त का क्षेत्रफल $= \mathbf{4\pi r^2} = \pi d^2$

(ii) Volume of a sphere/गोले का आयतन $= \mathbf{\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3}$

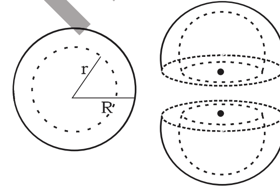
Hemisphere/अर्द्धगोला

A plane through the center of the sphere cuts it into two equal parts. Each part is called hemisphere.
एक गोले के केन्द्र से गुजरने वाली रेखा जिसको दो समान भागो में बाट देती है। प्रत्येक भाग अर्द्धगोला कहलाता है।



1. Volume of hemisphere/अर्द्धगोला का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$
2. Curved surface area or Surface area of hemisphere/अर्द्धगोला वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$
3. Total surface area of solid hemisphere/अर्द्धगोला कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

Spherical Shell/गोलाकार खोल



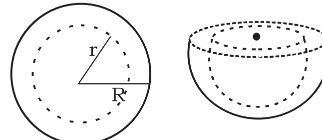
Outer C.S.A. = $4\pi R^2$

Inner C.S.A. = $4\pi r^2$

T.S.A.= $4\pi (R^2 + r^2)$

Volume = $\frac{4}{3}\pi\ (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}\left(D^3 - d^3\right)$

Hemispherical Shell/अर्द्धगोलाकार खोल



Outer C.S.A. = $2\pi R^2$

Inner C.S.A.= $2\pi r^2$

T.S.A of shell = $2\pi (R^2 + r^2) + \pi (R^2 - r^2)$

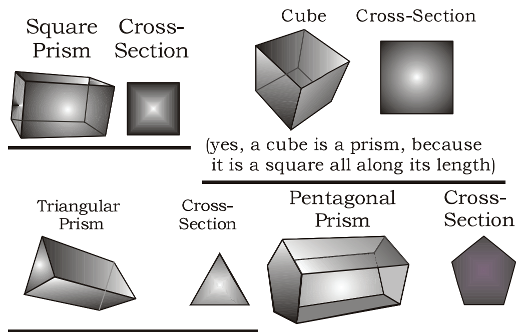
Volume = $\frac{2}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$

Right Prism/प्रिज्म

A prism is a solid object with/एक प्रिज्म ठोस आकृति होती है जिसमें ::

- Identical ends/समान अंत
- Flat faces/समतल छोर
- Same cross section all along its length/उसकी लंबाई के समानात्तर समान अनुप्रस्थ काट

There are all Prism/ये सभी प्रिज्म है- :

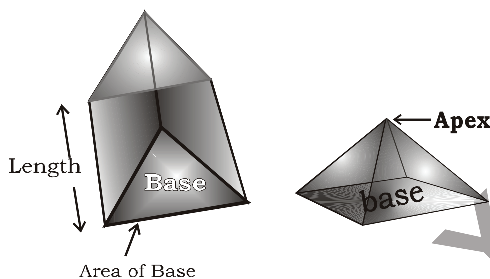


Lateral Surface Area of prism = Base Perimeter × Length/वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल प्रिज्म = आधार का परिमाप × लंबाई

Total Surface Area of prism = 2 × Base Area + Base Perimeter × Length/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × आधार का क्षेत्रफल + आधार का परिमाप × लंबाई

Volume of Prism/प्रिज्म का आयतन = Base area × Length

- **PYRAMID:-**



A pyramid is made by connecting a base to an apex. आधार को शिखर के साथ जोड़ कर पिरामिड बनाया जाता है।

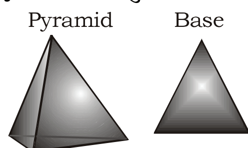
(i) Volume of pyramid $= \frac{1}{3} \times$ **(area of base) × height**

पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ (आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई)

(ii) Curved surface area of pyramid = $\frac{1}{2}$ × (perimeter of base) × slant height/पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई

(iii) Total surface area of pyramid = curved surface area + area of the base./पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

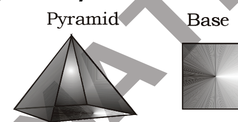
1. Triangular Pyramid/त्रिभुजाकार पिरामिड



Notice these interesting things/कुछ महत्वपूर्ण बिंदु :

- It has 4 Faces/इसके 4 छोर है।
- The 3 Side Faces are Triangles/इसका आधार त्रिभुज होता है।
- The Base is also a Triangle/बाकि के 3 छोर भी त्रिभुज होते है।
- It has 4 Vertices (corner points)/इसके 4 शीर्ष बिंदु होते है।
- It has 6 Edges/इसके 6 किनारे होते है।
- It is also a Tetrahedron (if all triangles are equilateral triangles)/यह एक समचतुष्फलक भी होता है।

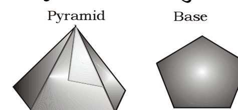
2. Square Pyramid/वर्गाकार पिरामिड



Notice these interesting things/कुछ महत्वपूर्ण बिंदु :

- It has 5 Faces/इसके 5 छोर है।
- The 4 Side Faces are Triangles/इसका आधार वर्ग होता है।
- The Base is a Square/बाकि के 4 छोर त्रिभुज होते है।
- It has 5 Vertices (corner points)/इसके 5 शीर्ष बिंदु होते है।
- It has 8 Edges/इसके 8 किनारे होते है।

3. Pentagonal Pyramid/पंचभुजीय पिरामिड

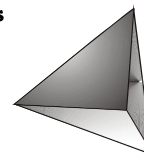


Notice these interesting things/कुछ महत्वपूर्ण बिंदु :

- It has 6 Faces/इसके 6 छोर है।
- The 5 Side Faces are Triangles/इसका आधार पंचभुज होता है।
- The Base is a Pentagon/बाकि के 5 छोर त्रिभुज होते है।
- It has 6 Vertices (corner points)/इसके 6 शीर्ष बिंदु होते है।
- It has 10 Edges/इसके 10 किनारे होते है।

Tetrahedron/समचतुष्फलक

Tetrahedron Facts



Notice these interesting things:/**महत्वपूर्ण बिंदु**

- It has 4 Faces/इसके 4 छोर होते है।
- Each face is an Equilateral Triangle/प्रत्येक छोर का एक समबाहु त्रिभुज होता है।
- It has 6 Edges/इसकी 6 भुजाऐ होती है।

- It has 4 Vertices (corner points) and at each vertex 3 edges meet
- It is one of the Platonic Solids/इसके 4 शीर्ष बिंदु होते है और प्रत्येक बिंदु पर 3 भुजाऐं मिलती है।

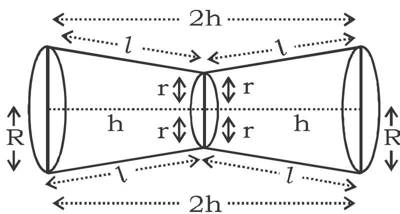
Surface Area of tetrahedron = $\sqrt{3} \times (\textbf{Edge Length})^2$

सम चर्तुष्फलक का पृष्ठीय क्षेत्रफल= $\sqrt{3} \times$ (भुजा की लंबाई) ²

Volume of tetrahedron = $\frac{\sqrt{2}}{12} \times (\textbf{Edge Length})^3$

सम चर्तुष्फलक का आयतन = $\frac{\sqrt{2}}{12} \times$ (भुजा की लंबाई) ³

Damaru/डमरू:-



(i) Volume of internal damaru/आंतरिक डमरू का आयतन

$= \frac{2}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$

(ii) T.S.A of damaru/डमरू के T.S.A

$= 2\pi (R + r)l + 2\pi R^2 = 2\pi\left(R^2 + Rl + rl\right)$

(iii) C.S.A of Damru/डमरू के C.S.A = $2\pi (R + r)l$

l (Slant height)/(तिरछी ऊंचाई) = $\sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

Where/जहाँ,

R = External Radius/बाहरी त्रिज्या

r = radius of middle part/मध्य भाग की त्रिज्या

Distance between both external core/दोनों बाहरी कोर के बीच की दूरी = 2h

- A well of 'D' m diameter or radius 'r' metre is dug 'h' m deep. If the earth taken out has been spread all round it to a width of 'w' m to form a circular embankment then the height of this embankment is given by/'D' मीटर व्यास या 'r' मीटर त्रिज्या का कुआं 'h' मीटर गहरा खोदा जाता है। यदि खुदी हुई मिट्टी को इसके चारों ओर 'w' मीटर की चौड़ाई तक फैलाकर एक वृत्ताकार तटबंध बना दिया जाए, तो इस तटबंध की ऊँचाई इस प्रकार दी जाएगी

$\left[\frac{r^2h}{W(W+D)}\right]$ Metres

- A right-angled triangle having base x metres and height equal to y metres is turned around the height, a right circular cone is formed then.

एक समकोण त्रिभुज जिसका आधार x मीटर और ऊंचाई y मीटर के बराबर है, को ऊंचाई के चारों ओर घुमाया जाता है, तब एक समकोणीय शंकु बनता है।

(i) Volume of the cone/शंकु का आयतन = $\sqrt{A_1.A_2.A_3}$

(ii) Surface area of the cone/शंकु का सतही क्षेत्रफल = $\left[\pi x\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right] m^2$

- A right angled triangle having base x m and height equal to y m is turned around the base, a right circular cone is formed then./एक समकोण त्रिभुज जिसका आधार x मीटर है और ऊंचाई y मीटर के बराबर है, को आधार के चारों ओर घुमाया जाता है, तब एक समकोणीय शंकु बनता है।

(i) Volume of the cone/शंकु का आयतन= $\left[\frac{\pi}{3} xy^2\right] m^3$

(ii) Surface area of the cone/शंकु का सतही क्षेत्रफल :

$\pi y\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) m^2$

- If a rectangular sheet is rolled into cylinder so that the one side becomes the height of the cylinder thenthe volume of the cylinder so formed is given by. यदि एक आयताकार शीट को बेलन में इस प्रकार लपेटा जाता है कि एक भुजा बेलन की ऊंचाई बन जाए तो इस प्रकार बने बेलन का आयतन किसके द्वारा दिया जाता है? $\text{Height} \times \frac{(\text{Other side of the sheet})^2}{4\pi}$

- If a sphere of certain diameter or radius is drawn into a cylinder of certain diameter or radius. Then the length or height of the cylinder is given by यदि एक निश्चित व्यास या त्रिज्या के गोले को एक निश्चित व्यास या त्रिज्या के बेलन में खींचा जाता है। फिर बेलन की लंबाई या ऊंचाई द्वारा दिया जाता है $\frac{4 \times (\text{Radius of Sphere})^3}{3 \times (\text{Radius of Cylinder})^2}$

- A sphere is converted into a cylinder. If the length and the radius of the cylinder are given, then radius of the sphere is/एक गोले को बेलन में बदला जाता है। यदि बेलन की लंबाई और त्रिज्या दी गई हो, तो गोले की त्रिज्या है

$\sqrt[3]{\frac{3}{4}(\text{length of cylinder})(\text{radius of cylinder})^2}$

- If a sphere of certain diameter or radius is drawn into a cylinder of certain height or length, then the radius of cylinder is given by/ यदि एक निश्चित व्यास या त्रिज्या का एक गोला एक निश्चित ऊँचाई या लंबाई के बेलन में खींचा जाता है, तो बेलन की त्रिज्या किसके द्वारा दी जाती है?

$\sqrt{\frac{4 \times (\text{Radius of Sphere})^3}{3 \times (\text{Length of Cylinder})}}$

- If sphere is melted to form a cylinder whose height is n times its radius then the ratio of radii of sphere to the cylinder is:/यदि गोले को पिघलाकर एक बेलन बनाया जाता है जिसकी ऊँचाई उसकी त्रिज्या की n गुनी है तो गोले की त्रिज्या का बेलन से अनुपात है:

$$\boxed{\left(\frac{3}{4}\times n\right)^{\frac{1}{3}}}$$

- If a cone, whose height is half of its radius, is melted to form a sphere, assuming that there is no loss of material in process, ratio of radius of the sphere to that of the cone is/ यदि एक शंकु, जिसकी ऊँचाई उसकी त्रिज्या की आधी है, को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है, यह मानते हुए कि प्रक्रिया में सामग्री की कोई हानि नहीं हुई है, गोले की त्रिज्या का शंकु की त्रिज्या से अनुपात है

$$\boxed{\left(\frac{n}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

- When a sphere disintegrates into many identical spheres, that number of smaller identical are given by/ जब एक गोला कई समरूप गोलों में विघटित होता है, तो छोटे समान गोलों की संख्या निम्न द्वारा दी जाती है $\boxed{\left(\frac{\text{bigger radius}}{\text{smaller radius}}\right)^3}$

Some Important Notes/कुछ महत्वपूर्ण नोट्स:-

- If the length, breadth and height of a cuboid are increased by x%, y%, z%, respectively then,/यदि एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई में क्रमश: x%, y%, z% की वृद्धि की जाती है, तो, $\boxed{x+y+z+\frac{xy+yz+zx}{100}+\frac{xyz}{(100)^2}}$
- Due to double of each side of cube its volume becomes n times means volume is increased by घन की प्रत्येक भुजा दोगुनी होने के कारण इसका आयतन n गुना हो जाता है अर्थात आयतन में वृद्धि हो जाती है = $\boxed{(n-1)\times100\%}$
- If side of a cube is increased by x% then percentage increase in volume
यदि एक घन की भुजा को x% से बढ़ाया जाता है तो आयतन में प्रतिशत वृद्धि होती है = $\boxed{3x+\frac{3x^2}{100}+\frac{x^3}{(100)^2}}$
- If the side of cube is increased by x% then increase in total surface area%
यदि घन की भुजा में x% की वृद्धि की जाती है तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि होती है:= $\boxed{2x+\left(\frac{x}{10}\right)^2}$
- If radius of a sphere is increased by x% then percent increase in its volume/ यदि एक गोले की त्रिज्या में x% की वृद्धि की जाती है तो इसके आयतन में प्रतिशत की वृद्धि होती है= $\boxed{3x+\frac{3x^2}{100}+\frac{x^3}{(100)^2}}$
- If radius of a sphere is increase by x% then in increase percentage in its surface area/यदि एक गोले की त्रिज्या में x% की वृद्धि की जाती है तो इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि होती है = $\boxed{2x+\left(\frac{x}{10}\right)^2}$
- If the ratio of radius of two cylinder or cone is R : r and ratio of height is H. then the ratio of their volume/यदि दो बेलन या शंकु की त्रिज्या का अनुपात R : r है और ऊँचाई का अनुपात H है, तो उनके आयतन का अनुपात = $\boxed{\frac{R^2}{r^2}\times\frac{H}{h}}$
- If the ratio of radius of two cylinders or cone is R : r and their volume is same./यदि दो बेलन या शंकु की त्रिज्या का अनुपात R : r है और उनका आयतन समान है।

Then ratio of height/फिर ऊंचाई का अनुपात = $\boxed{\left(\frac{r}{R}\right)^2}$

- If by melting a h height cone is changed into a sphere of radius r then, radius of cone/यदि एक h ऊँचाई के शंकु को पिघलाकर त्रिज्या वाले गोले में बदला जाता है, तो शंकु की त्रिज्या = $\boxed{2\times\sqrt{\frac{r^3}{h}}}$
- A, R radius sphere is changed into a wire of r radius base, then length of wire/A, R त्रिज्या के गोले को r त्रिज्या के आधार के तार में बदला जाता है, फिर तार की लंबाई= $\boxed{\frac{4}{3}\times\frac{R^3}{r^2}}$
- If radius is increase by x% but height remains constant then percent increase in volume.
यदि त्रिज्या ०% बढ़ जाती है लेकिन ऊंचाई स्थिर रहती है तो आयतन में प्रतिशत वृद्धि होती है = $\boxed{2x+\left(\frac{x}{10}\right)^2}$
- If height is increased by y% but radius remains constant then percent in crease in volume = y%
यदि ऊंचाई में y% की वृद्धि की जाती है लेकिन त्रिज्या स्थिर रहती है तो आयतन में कमी का प्रतिशत = y%
- If length, breadth and height of a cuboid are changed as x, y and z times respectively then percent increase in volume/यदि एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई को क्रमश: x, y और z बार बदला जाता है तो आयतन में प्रतिशत वृद्धि k = $\boxed{(xyz-1)\times100\%}$

- If all diagonals and side is known then, total surface area of cuboid/यदि सभी विकर्ण और भुजाएँ ज्ञात हों, तो घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

  = (sum of surface)^2 - (diagonal)^2

  (सतह का योग)^2 – (विकर्ण)^2

- To find number of bricks when the dimensions of brick and wall are given.

  ईंटों की संख्या ज्ञात करना जब ईंट और दीवार के आयाम दिए गए हों।

$$\text{Required no. of bricks / ईंटों की संख्या} = \frac{\text{Volume of wall / दीवार का आयतन}}{\text{Volume of one brick/एक ईट का आयतन}}$$

- To find capacity volume of material and weight of material of a closed box, when external dimensions (i.e length, breadth and height) and thickness of material of which box is made, area given.

  एक बंद बॉक्स की सामग्री की क्षमता मात्रा और वजन का पता लगाने के लिए, जब बाहरी आयाम (यानी लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई) और जिस बॉक्स की सामग्री की मोटाई बनाई जाती है, उसका क्षेत्रफल दिया जाता है।

  (i) Capacity of box = (External length – 2 × thickness) × (External breadth - 2 × thickness) × (External height - 2 × thickness)/बॉक्स की क्षमता = (बाहरी लंबाई – 2x मोटाई) × (बाहरी चौड़ाई – 2 × मोटाई) × (बाहरी ऊंचाई – 2 × मोटाई)

  (ii) Volume of material = External volume - capacity/सामग्री का आयतन = बाहरी आयतन – क्षमता

  (iv) Weight of wood = volume of wood × denisty of wood/लकड़ी का वजन = लकड़ी का आयतन × लकड़ी का घनत्व

- To find the volume of cube is the surface area of the cube is given/घन का आयतन ज्ञात करने के लिए घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल दिया गया है

$$\text{Volume of cube} = \left(\sqrt{\frac{\text{Surface area}}{6}}\right)^3$$

- Find the volume of rain water at a place if the annual rainfall of that place is given.

  किसी स्थान पर वर्षा जल का आयतन ज्ञात कीजिए यदि उस स्थान की वार्षिक वर्षा दी गई हो।

$$\text{Volume of rain water} = \underset{\text{(Annual rain fall)}}{\text{Height / level of water}} \times \underset{\text{(area of the place)}}{\text{Base area}}$$

- A rectangular tank is 'l' metres long and h metres deep. If x cubic metres of water be drawn off the tank, the level of the water in the tank goes down by 'd' metres, then the amount of water (in cubic metres) the tank can hold is given by $\left(\left(\frac{x \times h}{d}\right)\right)$ cubic metres and the breadth of the tank is $\left(\frac{x}{ld}\right)$ metres./एक आयताकार टैंक 'l' मीटर लंबा और h मीटर गहरा है। यदि टैंक से x घन मीटर पानी निकाला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 'd' मीटर नीचे चला जाता है, तो टैंक में समा सकने वाले पानी की मात्रा (घन मीटर में) घन मीटर और चौड़ाई द्वारा दी जाती है टैंक का मीटर है।

- When many cubes integrate into one cube, the side of the new cube is given by side

  जब कई घन एक घन में समाकलित हो जाते हैं, तो नए घन की भुजा भुजा द्वारा दी जाती है

$$\sqrt[3]{\text{Sum of cubes of side of all the cubes}}$$

- To find the number of possible cubes when disintegration of a cube into identical cubes.

  एक घन के समान घनों में विघटित होने पर संभावित घनों की संख्या ज्ञात करना।

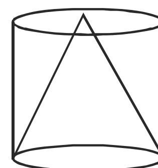
$$\text{Number of cubes} = \left(\frac{\text{Orignal length of side}}{\text{New length of side}}\right)^3$$

- When one cylinder is converted into many small spheres, then the number of small spheres is/ जब एक बेलन को कई छोटे-छोटे गोलों में बदला जाता है, तो छोटे-छोटे गोलों की संख्या होती है

$$\text{Number of small sphere} = \frac{\text{Volume of cylinder}}{\text{Volume of 1 sphere}}$$

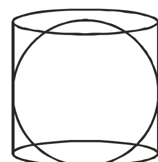
Some Important Results/कुछ महत्वपूर्ण परिणाम:-

1. Maximum cone inside Cylinder/बेलन के अंदर अधिकतम शंकु:-



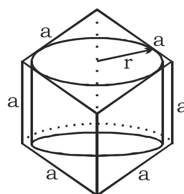
$$\frac{\text{Volume of Cylinder/बेलन का आयतन}}{\text{Volume of Cone/शंकु का आयतन}} = \frac{3}{1}$$

2. Maximum Sphere inside cylinder/बेलन के अंदर अधिकतम गोला:-



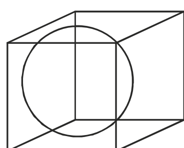
$$\frac{\text{Volume of Cylinder/बेलन का आयतन}}{\text{Volume of Sphere/गोला का आय तन}} = \frac{3}{2}$$

3. Maximum Cylinder inside Cube/घन के अंदर अधिकतम बेलन



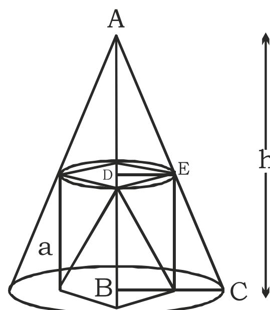
$$\frac{\text{Volume of Cube/घन का आयतन}}{\text{Volume of Cylinder/बेलन का आयतन}} = \frac{14}{11}$$

4. Maximum Sphere inside cube/घन के अंदर अधिकतम गोला:–



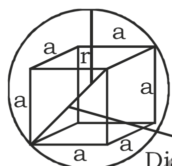
$$\frac{\text{Volume of Cube/घन का आयतन}}{\text{Volume of Sphere/गोला का आयतन}} = \frac{21}{11}$$

5. Maximum Cube inside cone/शंकु के अंदर अधिकतम घन:–



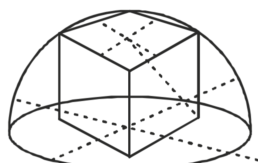
$$a = \frac{\sqrt{2}rh}{\sqrt{2}r+h}$$

6. Maximum Cube inside sphere/गोले के अंदर अधिकतम घन:–



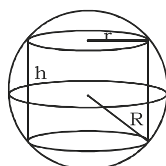
$$\frac{\text{Volume of Sphere/गोला का आयतन}}{\text{Volume of Cube/घन का आयतन}} = \frac{11\sqrt{3}}{7}$$

7. Maximum cube inside Hemisphere/अर्द्धगोले के अंदर अधिकतम घन:-



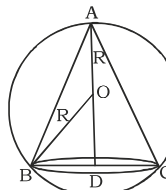
$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}r$$

8. Maximum Cylinder inside Sphere/गोला के अंदर अधिकतम बेलन:-



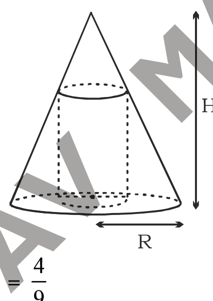
$$\frac{\text{Volume of Cylinder/बेलन का आयतन}}{\text{Volume of Sphere/गोला का आयतन}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

9. Maximum cone in sphere/गोला के अंदर अधिकतम शंकु:-



$$\frac{\text{Volume of Cone/शंकु का आयतन}}{\text{Volume of Sphere/गोला का आयतन}} = \frac{8}{27}$$

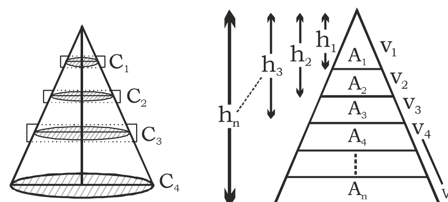
10. Maximum Cylinder inside cone/शंकु के अंदर अधिकतम बेलन:-



$$\frac{\text{Volume of Cylinder/बेलन का आयतन}}{\text{Volume of Cone/शंकु का आयतन}}$$

$= \frac{4}{9}$

- Cone Cuttig/कटिंग शंकु:–



C_1, C_2, C_3, C_4 ..... are cones
Where C_1 is smaller one.

- Ratio of some important variable in cone.
कुछ चर का अनुपात शंकु में

If Height

- $h_1 : h_2 : h_3 : .... = 1 : 2 : 3$ ....
then,

C.S.A

- $A_1 : A_2 : A_3 : .... = 1 : 3 : 5$..........
- $A_1 : (A_1+A_2) : (A_1+A_2+A_3) .... = 1^2 : 2^2 : 3^2 :$ .....

Volume

- $V_1 : V_2 : V_3 .... = 1 : 7 : 19$ ....
- $V_1 : (V_1+V_2) : (V_1+V_2+V_3) = 1^3 : 2^3 : 3^3$.......